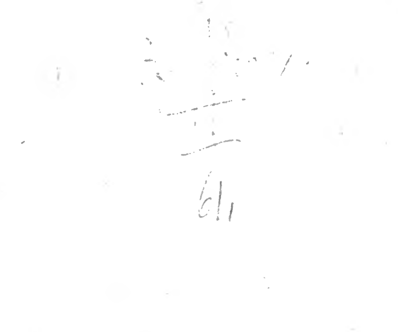






TRAITÉ
DE MÉCANIQUE.



TRAITÉ

DE MÉCANIQUE,

PAR S. D. POISSON,

Professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences de Paris, et Membre-adjoint du Bureau des Longitudes.

TOME PREMIER.

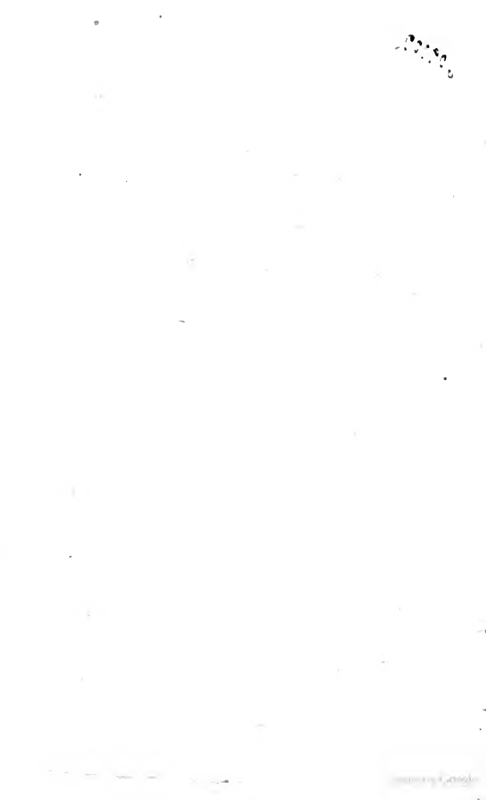




PARIS,

Chez Mme veuve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1811.



Cet Ouvrage a été écrit à l'occasion du Cours de Mécanique dont je suis chargé à l'Ecole Polytechnique. On l'a déjà imprimé sous un format différent, et distribué aux Elèves comme texte de mes leçons; mais je ne considère cette première impression que comme un essai qui m'a procuré l'avantage de pouvoir consulter plus facilement les personnes dont je desirais les conseils. En le publiant aujourd'hui, je n'ai rien négligé pour le perfectionner autant que cela dépendait de moi. Les tables des matières qui sont au commencement de chaque volume, contiennent une analyse exacte de l'ouvrage entier; il suffira de les parcourir, pour connaître le plan que j'ai suivi, et par là je serai dispensé d'en rendre compte. Quant au choix des démonstrations, je ne me suis assujéti exclusivement, ni à la méthode synthétique, ni à la marche analytique : dans un livre destiné à l'instruction, j'ai dû rechercher surtout la clarté et la simplicité, et préférer toujours les démonstrations qui jettent le plus de lumière sur les vérités qu'on veut prouver; je me suis donc

servi de tous les moyens qui m'ont paru propres à m'approcher de ce but; aussi trouvera-t-on souvent, mêlées dans une même question, les considérations géométriques et les formules de l'Algèbre; on jugera si j'ai employé à propos les unes et les autres.

Quoique cet Ouvrage soit un traité complet de mécanique rationnelle, il est néanmoins disposé de manière qu'il peut aussi servir à ceux qui n'ont besoin que des élémens de cette science, ou qui n'ont pas toutes les connaissances d'analyse qu'il suppose. Pour en faciliter l'usage aux Elèves qui doivent se présenter à l'Ecole Polytechnique, j'ai marqué d'une *, dans la table du premier volume, les articles de la Statique qui suffisent pour les examens d'admission, et qui forment environ 72 pages du texte. On trouvera à la fin de ce volume, sous le titre d'*Additions*, des notions élémentaires sur les machines, qui dispenseront les candidats de recourir à d'autres ouvrages. Il faudra, en outre, qu'ils substituent à la démonstration du parallélogramme des forces, exposée dans les nos 13, 14, 15 et 16 du texte, la démonstration purement géométrique que l'on a placée au commencement de ces Additions.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS CE VOLUME.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

LIVRE PREMIER.

STATIQUE.

suivant

LIVRE SECOND.

DYNAMIQUE

CHAP. I[er]. *Du mouvement rectiligne d'un point matériel.*

CHAP. II. *Du mouvement curviligne d'un point matériel libre.*

CHAP. III. *Du mouvement d'un point matériel sur une courbe donnée*, page 370

FIN DE LA TABLE DU PREMIER VOLUME.

FAUTES A CORRIGER.

Pag.	Lign.	
61,	18,	au lieu de $g'K'$, lisez $g'F'$.
62,	22,	au lieu de la droite KE, *lisez* la droite gE prolongée.
63,	3	en remontant, au lieu de $X.hl$, lisez $X.Ol$.
82,	6,	au lieu de n° 42, *lisez* n° 43.
98,	23,	au lieu de a, b, c, lisez a', b', c'.
103,	21,	au lieu de $L.\cos.q$, $L.\cos.q'$, $L.\cos.q''$, lisez $h.\cos.q$, $h.\cos.q'$, $h.\cos.q''$.
126,	1 et 3 en remontant,	*remplacez* la ligne AC par AB.
127,	10,	*idem*.
143,	2	en remontant, au lieu de AB, lisez AC.
148,	19,	au lieu de xx, mettez xdx.
150,	2,	au lieu de dx, mettez xdx.
152,	12,	au lieu de $\frac{4}{3}$, lisez $\frac{4}{13}$.
153,	11,	au lieu de V, mettez λ.
178,	20,	au lieu de mA', mA'', lisez $m'A'$, $m''A''$.
195,	2 et 3 en remontant,	au lieu de Ox et de Oy, lisez Kx et Ky.
206,	16,	au lieu de (6), lisez (b).
207,	4 et 5 en remontant,	au lieu de K et de KC', lisez K' et $K'C'$.
217,	1,	au lieu de le point K, *lisez* le point K (fig. 39).
226,	10,	au lieu de $l=1$, lisez $i=1$.
—	11,	au lieu de $b=\frac{\pi}{a}$, lisez $c=\frac{\pi}{a}$.
227,	7,	au lieu de $\frac{l\sqrt{2}}{2a}$, lisez $\frac{l\sqrt{2}}{2\pi}$.
294,	4	en remontant, au lieu de D, lisez B.
296,	4 et 5,	au lieu de b étant la plus grande des deux quantités et a étant b, *lisez* les deux quantités a et b étant supposées positives.
300,	21,	au lieu de sa densité est celle, *lisez* sa densité et celle.
350,	1	en remontant, au lieu de dp, lisez ds.
399,	12,	au lieu de Cp, lisez mp.
485,	4 et 5 en rem.,	au lieu de $B'K'$ et de $B''K''$, lisez $B'K$ et $B''K'$.
605,	23,	au lieu de sur un, *lisez* sur un plan

TRAITÉ

DE MÉCANIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Un corps est en mouvement lorsqu'il occupe successivement différens lieux de l'espace. Si nous le considérons à l'instant de son passage de l'état de repos à l'état de mouvement, nous observons que ce changement d'état est toujours l'effet d'une cause particulière qui agit à cet instant sur le mobile : c'est, par exemple, le choc d'un autre corps déjà en mouvement, qui vient déplacer celui que nous considérons, en vertu de leur impénétrabilité réciproque. Il peut nous sembler quelquefois que la matière se met d'elle-même en mouvement; mais en y réfléchissant davantage, nous reconnaissons que, dans ce cas, la cause qui produit ce mouvement, agit d'une manière permanente sur le mobile ; que son effet est empêché par quelque circonstance, et qu'il se manifeste aussitôt que cette circonstance

cesse d'avoir lieu. C'est ainsi qu'un corps pesant, placé sur un plan horizontal, tombe vers la surface de la terre, dès l'instant que l'on retire le plan qui suspendait l'effet de la pesanteur.

La cause quelconque qui met un corps en mouvement, est ce qu'on appelle une *force;* la *direction* d'une force est la droite qu'elle tend à faire décrire au point du corps auquel elle est appliquée.

2. Lorsque plusieurs forces sont appliquées à la fois à un même corps, elles se modifient réciproquement, en vertu de la liaison qui existe entre les différentes parties du corps, et qui empêche chacune d'elles de prendre le mouvement que la force à laquelle elle est soumise, tend à lui imprimer. S'il arrive que ces forces se détruisent totalement, de sorte que le corps reste en repos, on dit que les forces se font *équilibre*, ou autrement, que le corps est en *équilibre* sous l'action de ces forces.

La *Mécanique* est la science qui traite de l'équilibre et du mouvement des corps. La partie dont le but est en général de découvrir les conditions de l'équilibre, se nomme *Statique*. On appelle *Dynamique* l'autre partie, qui a pour objet de déterminer le mouvement que prend un mobile, quand les forces qui lui sont appliquées, ne se font pas équilibre. Les lois générales de la statique et de la

dynamique comprennent les fluides dans leurs applications; mais à cause des difficultés particulières que présente ce genre de corps, on a coutume de considérer d'une manière spéciale, la Mécanique des fluides où l'on distingue aussi deux parties, l'une qui traite de leur équilibre et qu'on nomme *Hydrostatique*, l'autre qu'on appelle *Hydrodynamique* et qui est relative à leur mouvement.

Les géomètres sont parvenus à ramener toutes les questions de dynamique à de simples questions d'équilibre: c'est donc la résolution de celles-ci qu'il nous faudra d'abord exposer; mais auparavant il est nécessaire de convenir des moyens que nous emploierons dans cet Ouvrage, pour déterminer le point d'application d'une force, son intensité et sa direction, qui sont les trois seules choses que l'on ait à considérer dans chaque force.

3. Tous les corps sont des assemblages de points matériels, liés entre eux de différentes manières dans les corps d'espèces différentes. En premier lieu, nous considérerons ces points matériels, isolément et sous le seul rapport qu'ils servent de points d'application aux forces; ensuite nous les réunirons pour former des corps solides, fluides ou simplement flexibles, et nous chercherons les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement dans chaque espèce de corps.

La position dans l'espace, du point d'application d'une force, se déterminera au moyen de trois coordonnées parallèles aux intersections de trois plans rectangulaires, choisis arbitrairement. C'est le moyen généralement connu qu'on emploie en Géométrie pour fixer la position des points d'une courbe ou d'une surface, et l'on sait qu'il ne laisse aucune indécision, quand on a égard à la fois au signe et à la grandeur de chaque coordonnée.

4. Les forces ne peuvent se mesurer qu'en prenant pour unité une force convenue, et en cherchant le rapport des autres forces à celle-là; mais d'après leur définition, les forces étant toutes les causes quelconques de mouvement qui existent dans la nature, on ne voit pas d'abord comment on peut comparer ces causes entre elles, et encore moins leur assigner un rapport numérique. Pour s'en former une idée nette, il convient d'établir avec précision, ce qu'on doit entendre par *force égale*, et par *force double*, *triple*, *quadruple*, ... d'une autre.

Deux forces sont *égales*, lorsqu'étant appliquées en sens contraire l'une de l'autre, à un même point ou aux extrémités d'une même droite inextensible, elles se font équilibre.

Si après avoir reconnu que deux forces sont

égales, on les applique, dans la même direction, à un même point, on aura une force *double;* si on réunit trois forces égales, on aura une force *triple;* si on en réunit quatre, on aura une force *quadruple;* et ainsi de suite.

Ainsi, toutes les fois que nous dirons qu'une force est un certain multiple d'une autre, il faudra entendre que la première peut être regardée comme formée par la réunion d'un certain nombre de forces égales à la seconde et agissant suivant une même direction.

De cette manière, les forces deviennent des quantités mesurables que l'on peut représenter par des nombres ou par des lignes, en les rapportant à une unité de leur espèce; car si dans une question on considère plusieurs forces qui soient des multiples donnés d'une autre force, en prenant celle-ci pour unité, les forces que l'on considère devront être représentées dans le calcul, par des nombres égaux à ces multiples, et dans les constructions géométriques, par des lignes proportionnelles à ces nombres. Ordinairement on prend la ligne qui représente l'intensité d'une force, sur la direction même de cette force, à partir de son point d'application. Nous ferons souvent usage de cette construction, dont l'avantage est de simplifier l'énoncé des théorèmes.

5. Voyons maintenant par quel moyen nous fixerons la direction d'une force dans l'espace.

Pour cela, soit m (fig. Ire) son point d'application, mD sa direction, de sorte que la force tende à faire avancer le point m, de m vers D; par le point m, menons trois axes rectangulaires mA, mB, mC, qui seront, si l'on veut, parallèles à ceux des coordonnées, et dirigés dans le sens des coordonnées positives; désignons par α, $\mathcal{C}$, γ, les angles aigus ou obtus que la direction mD fait avec ces axes, c'est-à-dire, supposons

$$AmD = \alpha, \quad BmD = \mathcal{C}, \quad CmD = \gamma:$$

je dis que cette direction sera complètement déterminée, quand ces trois angles seront donnés.

En effet, en ayant seulement égard aux angles α et $\mathcal{C}$, il faudra que la ligne mD se trouve en même temps sur deux cônes à base circulaire, dont le sommet commun est au point m, et qui ont pour axes, les lignes mA et mB; il faudra donc que ces angles soient tels que les deux cônes puissent se couper, ce qui aura lieu suivant deux arêtes situées dans un même plan perpendiculaire au plan AmB, et qui feront avec l'axe mC, l'une un angle aigu et l'autre un angle obtus. La direction de la force pourra donc encore avoir deux positions différentes dans l'espace; mais l'angle γ étant aussi donné, on

saura s'il est aigu ou obtus, et l'on pourra choisir entre ces deux positions, celle qui convient à la ligne mD.

6. Dans cette construction, les angles α, β, γ doivent s'étendre depuis zéro jusqu'à 200° (*) inclusivement, pour qu'on puisse, par leur moyen, représenter la direction d'une force quelconque dans toutes les positions possibles autour de son point d'application. Par exemple, dans notre figure où l'axe mC est au dessus du plan des deux autres, l'angle γ devra être plus petit ou plus grand que 100°, selon que cette direction tombera au dessus ou au dessous de ce plan : quand la ligne mD coïncidera avec la ligne mC, cet angle sera nul, et il sera égal à 200°, quand cette ligne coïncidera avec le prolongement mC' de mC. Les cosinus des angles α, β, γ pourront donc être positifs ou négatifs ; mais leurs sinus seront toujours positifs, parce que ces angles ne dépasseront jamais 200°.

7. Si nous considérons le prolongement mD' de la ligne mD, il est évident que les angles qu'il fait avec les axes mA, mB, mC, sont supplémens

(*) Nous adopterons, dans ce Traité, la division de l'angle droit en 100 degrés, du degré en 100 minutes, et de la minute en 100 secondes.

des angles α, β, γ; de sorte qu'en supposant

$$AmD' = \alpha', \quad BmD' = \beta', \quad CmD' = \gamma',$$

on aura

$$\alpha' = 200^\circ - \alpha, \quad \beta' = 200^\circ - \beta, \quad \gamma' = 200^\circ - \gamma,$$

et par conséquent

$$\cos.\alpha' = -\cos.\alpha, \quad \cos.\beta' = -\cos.\beta, \quad \cos.\gamma' = -\cos.\gamma;$$

d'où il suit que deux forces dont les directions sont contraires, ou qui agissent suivant une droite et son prolongement, se distingueront l'une de l'autre, en ce que les angles relatifs à la direction de l'une seront supplémens de ceux qui se rapportent à la direction de l'autre, ce qui fait que les cosinus des premiers seront égaux et de signes contraires aux cosinus des seconds.

8. On voit aussi, par la construction précédente (n° 5), que les angles α, β, γ doivent être liés entre eux, et ne peuvent pas être pris tous trois au hasard. Il existe effectivement entre leurs cosinus une équation

$$\cos^2.\alpha + \cos^2.\beta + \cos^2.\gamma = 1,$$

qui a lieu toutes les fois que α, β, γ sont les angles qu'une même droite fait avec trois axes rectangulaires.

Pour la démontrer, il suffira de prendre sur la di-

rection mD, à partir du point m, une ligne égale à l'unité, et de former ensuite le parallélépipède rectangle, dont cette ligne est la diagonale et dont les trois côtés adjacens sont pris sur les trois axes Am, Bm, Cm; il est aisé de voir que ces trois côtés exprimeront les cosinus des angles AmD, BmD, CmD; or, d'après un théorème connu, le carré de la diagonale est égal à la somme des carrés des trois côtés, ce qui donne l'équation qu'on veut démontrer.

9. Quand toutes les forces que l'on considère dans une question, sont dirigées dans un même plan, on peut prendre, dans ce plan, deux des trois axes auxquels on rapporte leurs directions, et alors l'angle relatif au troisième axe, est droit pour toutes les forces. En supposant que γ soit cet angle, on aura $\cos.\gamma = 0$, et l'équation de condition se réduira à

$$\cos^2.\alpha + \cos^2.\mathcal{C} = 1.$$

On pourrait, dans ce cas, n'employer qu'un seul axe et un seul angle pour déterminer la direction de chaque force, pourvu que l'on fît croître cet angle depuis zéro jusqu'à 400°. C'est pour conserver l'analogie avec le cas général, que nous continuerons de faire usage des deux angles α et $\mathcal{C}$, assujétis à ne pas dépasser 200° et liés entre eux par cette dernière équation.

10. Si toutes les forces sont parallèles entre elles, on peut supposer que l'un des axes leur soit aussi parallèle. Alors deux des angles α, 6, γ deviennent droits; supposant donc $6 = 100°$, $\gamma = 100°$, l'équation de condition se réduit à

$$\cos^2.\alpha = 1;$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 0, \quad \text{ou} \quad \alpha = 200°.$$

De cette manière, la direction d'une force serait donnée en disant qu'elle fait, avec l'axe un angle nul ou un angle de 200°; mais dans ce cas particulier, il sera plus simple de déterminer cette direction par le signe de la force, en regardant comme positives les forces qui agissent dans un sens, et comme négatives, celles qui agissent dans le sens opposé.

Au reste, le cas des forces parallèles sera le seul où nous considérerons des forces positives et des forces négatives : dans tous les autres cas, les quantités qui représenteront les forces dans le calcul, seront positives, et la variation de signe tombera sur les cosinus des angles que leurs directions font avec les axes des coordonnées.

LIVRE PREMIER

STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'ÉQUILIBRE D'UN POINT MATÉRIEL.

11. Lorsqu'un point matériel est soumis à l'action simultanée de plusieurs forces qui agissent sur lui dans des directions différentes et qui ne se font point équilibre, il est évident qu'il doit se mouvoir dans une certaine direction, et que rien n'empêche d'attribuer le mouvement qu'il prend à une force unique, agissant sur lui dans cette direction. Cette force est ce qu'on appelle la *résultante* de celles qui ont mis le corps en mouvement, et celles-ci sont nommées les *composantes* de la première. La propriété caractéristique de la résultante est de pouvoir remplacer identiquement les composantes, et par conséquent, de leur faire équilibre, quand on l'applique au point matériel, en sens contraire de sa direction; car alors ce point est dans le même état que s'il était sollicité par deux forces égales et directement opposées. Déterminer en grandeur et en direction, la résultante de plusieurs forces données, est

un point fondamental de la statique dont nous allons d'abord nous occuper.

12. Si toutes les composantes sont dirigées suivant une même droite et suivant son prolongement, la résultante sera égale à la somme de celles qui agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent en sens contraire; elle agira dans le sens de la plus grande somme : quand ces deux sommes seront égales, elle sera nulle et les forces données se feront équilibre.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la notion que nous avons donnée plus haut (n° 4), du rapport numérique des forces.

13. Lorsque deux forces égales agissent sur un même point, suivant des directions différentes, il n'y a aucune raison pour que leur résultante se rapproche plus de l'une que de l'autre; elle doit donc couper l'angle compris entre leurs directions, en deux parties égales; de sorte que sa direction est connue, et qu'il ne s'agit plus que de déterminer sa grandeur.

Soit, pour y parvenir, mA et mB (fig. 2), les directions des composantes dont la valeur commune sera représentée par P; $2x$, l'angle AmB; mC, la direction de la résultante; de manière que $AmC=BmC=x$. Son intensité ne peut dépendre que des quantités P et x, dont elle est une fonction inconnue; désignant donc par R la valeur de la résultante, nous aurons

$$R=f(P,x).$$

Dans cette équation, R et P sont les seules quantités dont l'expression numérique varie avec l'unité de force que l'on choisit; leur rapport $\frac{R}{P}$ est indépendant de cette unité; d'où l'on peut conclure qu'il doit être une simple fonction de x, et, par conséquent, que la fonction $f(P,x)$ est de la forme $P.\varphi x$. Ainsi l'on a

$$R = P.\varphi x,$$

et la question est réduite à déterminer la forme de la fonction φx.

Pour cela, je mène arbitrairement par le point m, les quatre lignes mA', mA'', mB', mB''; je suppose les quatre angles $A'mA$, $A''mA$, $B'mB$, $B''mB$, égaux entre eux, et je les représente par z; cela fait, je décompose la force P dirigée suivant mA, en deux forces égales dirigées suivant mA' et mA'', c'est-à-dire, que je regarde cette force P comme la résultante de deux forces égales dont la valeur est inconnue, et qui agissent suivant les lignes données mA' et mA''. En désignant par Q, cette valeur, j'aurai

$$P = Q.\varphi z;$$

car il doit exister entre les quantités P,Q et z, la même relation qu'entre les quantités R,P et x. Je décompose de même la force P dirigée suivant mB, en deux forces Q dirigées suivant mB' et mB''; de cette manière, les deux forces P se trouvent remplacées par les quatre forces Q : la résultante de celles-ci doit donc coïncider, en grandeur et en direction, avec la force R, résultante des forces P.

Or, en appelant Q' la résultante des deux forces Q dirigées suivant mA' et mB', et observant que $A'mC = B'mC = x - z$, cette force Q' sera dirigée suivant mC, et l'on aura

$$Q' = Q.\varphi(x - z).$$

De même la résultante des deux autres forces Q qui agissent suivant mA'' et mB'', sera dirigée suivant mC, puisque cette ligne coupe l'angle $A''mB''$ en deux parties égales, et à cause de $A''mC = B''mC = x + z$, on aura

$$Q'' = Q.\varphi(x + z),$$

Q'' désignant cette résultante. Les deux forces Q' et Q'' étant dirigées suivant la même ligne mC, leur résultante, qui est aussi celle des quatre forces Q, sera égale à leur somme; on doit donc avoir

$$R = Q' + Q'';$$

mais on a déjà $R = P.\varphi x = Q.\varphi z.\varphi x$; substituant cette valeur de R et celles de Q' et Q'', et supprimant ensuite le facteur Q, commun à tous les termes de l'équation, il vient

$$\varphi x.\varphi z = \varphi(x - z) + \varphi(x + z).$$

C'est cette équation qu'il nous reste à résoudre pour en déduire la valeur de φx, ou, ce qui revient au même, celle de φz. On y parvient d'une manière fort simple, par les considérations suivantes.

14. Développons $\varphi(x-z)$ et $\varphi(x+z)$, suivant les puissances de z, au moyen du théorème de Taylor; substituons ces deux séries dans notre équation, et

divisons tous ses termes par φx, nous aurons

$$\varphi z = 2\left(1 + \frac{d^2.\varphi x}{\varphi x.dx^2}.\frac{z^2}{2} + \frac{d^4.\varphi x}{\varphi x.dx^4}.\frac{z^4}{2.3.4} + \text{etc.}\right).$$

Or, φz ne devant pas contenir x, il faut que x n'entre pas dans les coefficiens.

$$\frac{d^2.\varphi x}{\varphi x.dx^2},\quad \frac{d^4.\varphi x}{\varphi x.dx^4},\ \text{etc.};$$

il faut donc que toutes ces quantités soient constantes, c'est-à-dire, indépendantes des variables x et z. Soit b la valeur de la première; on aura

$$\frac{d^2.\varphi x}{dx^2} = b.\varphi x;$$

d'où l'on tire, par des différentiations répétées,

$$\frac{d^4.\varphi x}{dx^4} = b.\frac{d^2.\varphi x}{dx^2} = b^2.\varphi x,\quad \frac{d^4.\varphi x}{\varphi x.dx^4} = b^2;$$

$$\frac{d^6.\varphi x}{dx^6} = b^2.\frac{d^2.\varphi x}{dx^2} = b^3.\varphi x,\quad \frac{d^6.\varphi x}{\varphi x.dx^6} = b^3;$$

etc.;

et par conséquent

$$\varphi z = 2\left(1 + \frac{bz^2}{2} + \frac{b^2z^4}{2.3.4} + \frac{b^3z^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}\right),$$

ou bien, en remplaçant b par une autre constante $-a^2$, ce qui est permis,

$$\varphi z = 2\left(1 - \frac{a^2z^2}{2} + \frac{a^4z^4}{2.3.4} - \frac{a^6z^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}\right).$$

On reconnaît sans peine dans la série comprise entre les parenthèses, le développement de cos. az;

donc $\varphi z = 2 . \cos . az$, et en mettant x à la place de z,

$$\varphi x = 2 . \cos ax ;$$

d'où il résulte

$$R = 2P . \cos ax .$$

Pour déterminer la quantité a, qu'on sait être indépendante de x, j'observe que quand $x = 100^\circ$, les deux forces P sont directement opposées ; leur résultante R est donc nulle ; ainsi l'on doit avoir

$$\cos . (a . 100^\circ) = 0 ;$$

ce qui exige que a soit un nombre entier impair. Je dis de plus qu'on a $a = 1$; car si l'on avait $a > 1$, par exemple $a = 3$, la résultante R deviendrait nulle pour $x = \frac{100^\circ}{3}$; les deux forces P se feraient donc équilibre sans être directement opposées ; ce qui est impossible. On aura donc

$$R = 2P . \cos . x .$$

Si l'on prend sur les lignes mA et mB des parties égales mk et mh pour représenter les forces P ; que l'on achève ensuite le lozange $mkrh$, et qu'on mène la seconde diagonale kh qui coupe à angle droit la première au point n, on aura

$$mn = nr = mk . \cos . kmr ;$$

par conséquent

$$mr = 2 . mk . \cos . kmr ;$$

comparant cette équation à la valeur de R, et observant que $kmr = x$, on en conclut

$$R : P :: mr : mk ;$$

donc la résultante R des deux forces P est représentée

sentée par la diagonale mr du lozange construit sur les lignes mk et mh qui représentent ces forces.

Il nous sera aisé maintenant d'étendre ce théorème à deux composantes inégales, en commençant par le cas où leurs directions font un angle droit.

15. Soit dans ce cas mA et mB (fig. 3), les directions des deux forces appliquées au point m; supposons que ces forces sont représentées par les lignes mp et mq, prises sur leurs directions (n° 4); construisons sur ces deux lignes, le parallélogramme rectangle $mprq$, et menons ses deux diagonales mr et pq qui se coupent au point n; par le point m, menons aussi la ligne $p'q'$, parallèle à pq, et par les points p et q, les droites pp' et qq', parallèles à mr et qui rencontrent la ligne $p'q'$ aux points p' et q'. Les deux parallélogrammes $mnpp'$, $mnqq'$ sont des lozanges; car l'angle pmq étant droit et le parallélogramme $mprq$ étant un rectangle par hypothèse, il s'ensuit $mr = pq$ et $mn = pn = qn$, et par conséquent $mp' = mn$, $mq' = mn$. On peut donc, d'après le théorème précédent, regarder la force mp (*), comme la résultante de deux forces égales mp' et mn, et la force mq, comme la résultante de la force mq' et d'une seconde force mn; donc au lieu des deux forces données mp et mq, nous avons les deux forces mp' et mq', et les deux forces mn: les deux

(*) Par force mp, on entend une force représentée en grandeur et en direction par la ligne mp. C'est une expression abrégée que l'usage a consacrée.

premières se détruisent, comme étant égales et directement opposées, tandis que les deux autres s'ajoutent et donnent la force $2.mn$, ou mr; il s'ensuit donc que la résultante de deux forces quelconques mp et mq, dont les directions font un angle droit, est représentée en grandeur et en direction par la diagonale mr du rectangle $mprq$ construit sur ces forces.

16. Maintenant supposons que les directions des deux composantes fassent un angle quelconque AmB (fig. 4), et soient toujours mp et mq les lignes qui représentent ces forces. Construisons sur ces deux lignes le parallélogramme $mprq$; par le point m, menons la perpendiculaire $p'q'$ à la diagonale mr; abaissons des points p et q, les perpendiculaires pp' et qq' sur $p'q'$, et pp'' et qq'' sur mr; nous aurons les deux rectangles $mp'pp''$ et $mq'qq''$, dont les côtés mp' et mq', sont égaux comme étant les hauteurs de deux triangles égaux, mpr et mqr; et en vertu du dernier théorème, la force mp sera la résultante des forces mp' et mp'', et la force mq sera celle des forces mq' et mq''; de sorte que nous pouvons substituer les quatre forces mp', mp'', mq', mq'', aux deux forces données mp et mq; or, mp' et mq' se détruisent, puisqu'elles sont égales et contraires; mp'' et mq'' s'ajoutent, parce qu'elles agissent suivant la même droite; et leur somme est égale à la diagonale mr, car il est aisé de voir que $mq'' = p''r$; par conséquent mr est la résultante des deux forces mp et mq.

Concluons donc que *la résultante de deux force*

quelconques, appliquées en un même point et représentées par des lignes prises sur leurs directions à partir de ce point, est représentée en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces.

17. Au moyen de ce théorème, toutes les questions qu'on peut proposer sur la *composition* de deux forces en une seule, et sur la *décomposition* d'une force en deux autres, sont ramenées à la résolution d'un triangle. En effet, la résultante et les deux composantes sont représentées par les trois côtés mr, mp et pr du triangle mpr; les angles de ce triangle sont les angles compris entre la résultante et les composantes, et le supplément de l'angle compris entre les deux composantes; il s'ensuit donc que trois de ces six choses, les trois forces et les trois angles compris entre leurs directions, étant données, on trouvera les trois autres en résolvant le triangle mpr; ce qui suppose une force au moins au nombre des données. Par exemple, soient P et Q les valeurs des deux composantes, m l'angle compris entre leurs directions; on demande leur résultante et l'angle qu'elle fait avec la force P. On trouvera d'abord cette équation

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ.\cos.m,$$

qui fera connaître la résultante R; et appelant x l'angle demandé, on aura pour le déterminer, cette proportion

$$R : Q :: \sin.m : \sin.x.$$

18. Si l'équilibre a lieu entre trois forces P, Q, S

appliquées au point m (fig. 5), suivant les directions mp, mq, ms, il faut que l'une quelconque des trois soit égale et directement opposée à la résultante des deux autres; et comme cette résultante est comprise dans le plan de ces deux forces, il s'ensuit d'abord que les trois forces doivent être dans un même plan. Soit mr le prolongement de ms; la résultante R de P et Q sera dirigée suivant mr, et l'on aura $R=S$. Mais d'après le n° précédent, on a, en comparant cette résultante à chacune de ses composantes,

$$R : Q :: \sin.pmq : \sin.pmr,$$
$$R : P :: \sin.pmq : \sin.qmr;$$

de plus,

$$\sin.pmr = \sin.pms, \quad \sin.qmr = \sin.qms;$$

on aura donc

$$S : Q : P :: \sin.pmq : \sin.pms : \sin.qms;$$

résultat qui nous montre que *quand trois forces se font équilibre autour d'un même point, chacune d'elles peut être représentée par le sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.*

19. La résultante de deux forces étant connue, il est aisé d'en déduire celle d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point, et situées ou non situées dans un même plan : on prendra d'abord la résultante de deux de ces forces, ensuite on composera cette résultante avec une troisième force, puis cette seconde résultante avec une quatrième force; on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les forces données : la dernière résultante que l'on obtiendra, sera celle de toutes ces forces. Cette

règle donne lieu à une construction géométrique qui mérite d'être remarquée.

Représentons les forces données par des lignes mA, mA', mA'', mA''', etc., prises sur leurs directions à partir du point d'application, qui est ici le point m (fig. 6). Par le point A, menons une ligne AB égale et parallèle à mA'; par le point B, menons une ligne BC, égale et parallèle à mA''; par le point C, menons de même une ligne CD, égale et parallèle à mA'''; et ainsi de suite. Nous formerons de cette manière une portion de polygone dont le nombre de côtés sera égal à celui des forces données: en joignant l'extrémité de son dernier côté et le point m par une droite, cette ligne représentera en grandeur et en direction la résultante cherchée.

En effet la ligne mB exprime la résultante des forces mA et mA'; la ligne mC représente celle des forces mB et mA'', ou des trois forces mA, mA' et mA''; la ligne mD représente la résultante des forces mC et mA''', ou celle des quatre forces mA, mA', mA'', mA'''; et ainsi de suite. L'ordre dans lequel on prend les forces est absolument indifférent; on pourra former, en changeant cet ordre, différens polygones; mais la ligne qui joint l'extrémité du dernier côté au point m, sera la même en grandeur et en direction dans tous ces polygones.

Dans le cas particulier où les forces données sont au nombre de trois, non situées dans un même plan, la résultante est en grandeur et en direction, la diagonale du parallelépipède construit sur ces trois forces, comme côtés adjacens. Ainsi, par exemple,

il est aisé de voir que la ligne mC, qui représente la résultante des trois forces mA, mA', mA'', est la diagonale du parallélépipède que l'on construirait en prenant ces trois lignes pour côtés adjacens.

20. Cette construction est peu propre à donner la valeur de la résultante d'un nombre quelconque de forces, et les valeurs des angles qui déterminent sa direction, en fonction de ces mêmes forces; mais on y parvient très-simplement, en considérant en particulier le cas de trois forces rectangulaires, auquel on peut ramener tous les autres, comme nous le ferons voir ensuite.

Soient X, Y, Z, les trois composantes; R, leur résultante; a, b, c, les trois angles que fait la direction de la force R, avec celles des forces X, Y, Z. D'après ce qu'on vient de voir, R est la diagonale du parallélépipède dont X, Y, Z sont les trois côtés; or, ce parallélépipède étant rectangle, il s'ensuit qu'on aura

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \qquad (1)$$

Il s'ensuit aussi que si l'on joint l'extrémité de la diagonale R, à celles des trois côtés X, Y, Z, on formera trois triangles rectangles dont R sera l'hypothénuse commune; d'où l'on conclura

$$X = R.\cos.a, \quad Y = R.\cos.b, \quad Z = R.\cos.c; \qquad (2)$$

équations qui s'accordent avec la précédente, à cause que a, b, c sont liés entre eux (n° 8) par cette équation de condition

$$\cos^2.a + \cos^2.b + \cos^2.c = 1.$$

Lorsque les composantes X, Y, Z seront données, l'équation (1) fera connaître la valeur de la résultante, et les équations (2) en détermineront la direction, au moyen des angles a, b, c. Si, au contraire, la force R est donnée, et qu'il s'agisse de la décomposer en trois forces rectangulaires X, Y, Z, qui fassent avec elle des angles donnés a, b, c, les valeurs des forces demandées seront immédiatement déterminées par les équations (2).

Si l'une des composantes, par exemple, la force Z, est nulle, R n'est plus la résultante que des deux forces X et Y; elle est comprise dans leur plan, et sa direction dépend seulement des deux angles a et b. Ces angles et la valeur de R sont alors déterminés par ces équations

$$R^2 = X^2 + Y^2, \quad R.\cos.a = X, \quad R.\cos.b = Y,$$

qui se déduisent des précédentes en y faisant $Z = 0$, $c = 100°$, et que l'on peut aussi obtenir directement par la considération du parallélogramme rectangle dont X et Y sont les côtés et R la diagonale.

21. Supposons actuellement que m (fig. 1) soit le point d'application d'un nombre quelconque de forces données en grandeur et en direction. Représentons ces forces par P, P', P'', etc.; et, pour fixer les idées, supposons que la ligne mD soit la direction de la force P : les directions des autres forces sont inutiles à indiquer dans la figure. Soient α, β, γ les angles que fait la direction mD avec les axes rectangulaires mA, mB, mC; désignons de même par α', β', γ', les angles que fait la force P' avec ces axes; par $\alpha'', \beta'', \gamma''$, ceux qui se rapportent à la force P''; etc.

Tous ces angles sont donnés et doivent s'étendre depuis zéro jusqu'à 200° inclusivement (n° 6), afin que les forces P, P', P'', etc. puissent avoir toutes les positions possibles autour du point m.

Décomposons chacune de ces forces en trois autres dirigées suivant les axes mA, mB, mC : $P.\cos.\alpha$, $P.\cos.\mathrm{\beta}$, $P.\cos.\gamma$, seront les composantes de P; $P'.\cos.\alpha'$, $P'.\cos.\mathrm{\beta}'$, $P'.\cos.\gamma'$ seront celles de P'; etc. Ces composantes agiront suivant les axes ou suivant leurs prolongemens, selon qu'elles seront positives ou négatives. Par exemple, la direction mD tombant au-dessus du plan AmB, la composante $P.\cos.\gamma$ de la force P tend à élever le point m, c'est-à-dire, qu'elle agit suivant l'axe mC; et, dans ce cas, $P.\cos.\gamma$ est une quantité positive, puisqu'on a $\gamma < 100°$. Au contraire, si cette direction tombait au-dessous de ce plan, on aurait alors $\gamma > 100°$; la composante $P.\cos.\gamma$ serait négative, et en même tems elle tendrait à abaisser le point m, c'est-à-dire, qu'elle agirait suivant le prolongement mC' de l'axe mC. En ayant donc égard aux signes des composantes, on voit, d'après ce qui a été dit dans le n° 12, que toutes les forces dirigées suivant un même axe et son prolongement, se réduisent à une seule, égale à leur somme.

De cette manière, les forces données P, P', P'', etc. sont remplacées par trois forces rectangulaires; et en désignant celles-ci par X, Y, Z, on aura

$$X = P.\cos.\alpha + P'.\cos.\alpha' + P''.\cos.\alpha'' + \text{etc.},$$
$$Y = P.\cos.\mathrm{\beta} + P'.\cos.\mathrm{\beta}' + P''.\cos.\mathrm{\beta}'' + \text{etc.},$$
$$Z = P.\cos.\gamma + P'.\cos.\gamma' + P''.\cos.\gamma'' + \text{etc.}$$

Ces valeurs de X, Y, Z pourront être positives ou négatives, et leurs signes désigneront le sens dans lequel ces forces agissent : si la force X est positive, c'est qu'elle agit suivant l'axe mA, ou dans le sens des composantes $P.\cos.\alpha$, $P'.\cos.\alpha'$, etc. qui sont positives ; si elle est négative, il en faut conclure que la force X agit suivant le prolongement de mA, ou dans le sens des composantes négatives ; et de même pour les forces Y et Z.

Cela posé, soit R la résultante de toutes les forces P, P', P'', etc., ou des trois forces X, Y, Z ; soient aussi a, b, c, les angles que sa direction inconnue fait avec les axes mA, mB, mC ; nous aurons, d'après le numéro précédent,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos.a = \frac{X}{R}, \quad \cos.b = \frac{Y}{R}, \quad \cos.c = \frac{Z}{R}.$$

Au moyen de ces valeurs, la grandeur et la direction de la résultante sont complètement déterminées. En construisant cette direction, comme il a été dit précédemment (n° 5), il faudra faire attention aux signes de $\cos.a$, $\cos.b$, $\cos.c$, qui décideront si les angles a, b, c sont aigus ou obtus. Comme la force R est une quantité positive, ces cosinus seront respectivement de même signe que X, Y, Z.

22. Pour que les forces P, P', P'', etc., soient en équilibre, il suffit que leur résultante soit nulle ; mais l'équation

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 0,$$

ne peut avoir lieu, à moins qu'on n'ait séparément

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=0,$$

c'est-à-dire,

$$\left.\begin{array}{l} P.\cos.\alpha+P'.\cos.\alpha'+P''.\cos.\alpha''+\text{etc.}=0,\\ P.\cos.6+P'.\cos.6'+P''.\cos.6''+\text{etc.}=0,\\ P.\cos.\gamma+P'.\cos.\gamma'+P''.\cos.\gamma''+\text{etc.}=0.\end{array}\right\}(3)$$

Telles sont les *équations d'équilibre* d'un système de forces quelconques, appliquées à un même point que l'on suppose entièrement libre. Dans un pareil système, l'une des forces doit être égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres; c'est en effet ce qu'il est facile de vérifier de cette manière :

Soit R' la résultante des forces P', P'', etc.; a', b', c', les angles qu'elle fait avec les axes auxquels on rapporte les directions de ces forces; et faisons, pour abréger,

$$X'=P'.\cos.\alpha'+P''.\cos.\alpha''+\text{etc.},$$
$$Y'=P'.\cos.6'+P''.\cos.6''+\text{etc.},$$
$$Z'=P'.\cos.\gamma'+P''.\cos.\gamma''+\text{etc.};$$

nous aurons, d'après le numéro précédent,

$$X'=R'.\cos.a',\quad Y'=R'.\cos.b',\quad Z'=R'.\cos.c';$$

et par conséquent, en vertu des équations d'équilibre,

$$P.\cos.\alpha=-R'.\cos.a',$$
$$P.\cos.6=-R'.\cos.b',$$
$$P.\cos.\gamma=-R'.\cos.c'.$$

En ajoutant les carrés de ces équations, il vient

$$P^2=R'^2;$$

à cause que (n° 8)

$$\cos^2.\alpha+\cos^2.6+\cos^2.\gamma=1, \quad \cos^2.a'+\cos^2.b'+\cos^2.c'=1:$$

On aura donc $P=\pm R'$; mais comme ces forces doivent être toutes deux des quantités positives, il faut qu'on ait $P=R'$. Les équations précédentes se réduisent alors à

$$\cos.\alpha=-\cos.a', \ \cos.6'=-\cos.b', \ \cos.\gamma=-\cos.c';$$

d'où l'on conclut

$$\alpha=200^\circ-a', \quad 6=200^\circ-b', \quad \gamma=200^\circ-c';$$

or, les supplémens des trois angles a', b', c', répondent (n° 7) à une force dont la direction coïncide avec le prolongement de celle de R'; il s'ensuit donc que la force P est égale et directement opposée à la résultante R'.

23. Si le point m auquel sont appliquées les forces P, P', P'', etc., est assujéti à rester sur une surface donnée, il ne sera plus nécessaire pour l'équilibre, que la résultante de ces forces soit nulle; il suffira qu'elle soit normale à la surface, afin que le point m ne puisse glisser, dans aucun sens, sur cette surface. La force normale sera détruite par la résistance de la surface; par conséquent cette résistance équivaudra à une force égale et contraire à la force détruite. On conçoit donc que l'on peut faire abstraction de la surface donnée, et considérer le point matériel comme libre, pourvu que l'on ajoute aux forces P, P', P'', etc., qui agissent sur ce point, une

nouvelle force de grandeur inconnue, et perpendiculaire à la surface donnée.

Soit N, cette force; ε, ε', ε'', les angles qu'elle fait avec les axes mA, mB, mC; chacune des équations d'équilibre qu'on vient de trouver sera augmentée d'un nouveau terme; de sorte qu'elles deviendront

$$\left.\begin{array}{l} N.\cos.\varepsilon + P.\cos.\alpha + P'.\cos.\alpha' + \text{etc.} = 0, \\ N.\cos.\varepsilon' + P.\cos.6 + P'.\cos.6' + \text{etc.} = 0, \\ N.\cos.\varepsilon'' + P.\cos.\gamma + P'.\cos.\gamma' + \text{etc.} = 0. \end{array}\right\} (4)$$

Les valeurs de $\cos.\varepsilon$, $\cos.\varepsilon'$, $\cos.\varepsilon''$ se déduiront de l'équation de la surface : en la désignant par $L = 0$; par x, y, z les coordonnées du point m, rapportées à des axes parallèles à mA, mB, mC, on aura, d'après les formules connues,

$$\cos.\varepsilon = V.\frac{dL}{dx}, \quad \cos.\varepsilon' = V.\frac{dL}{dy}, \quad \cos.\varepsilon'' = V.\frac{dL}{dz},$$

en faisant, pour abréger,

$$V = \pm \frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]}}.$$

L'un de ces deux signes se rapporte à la partie de la normale qui tombe dans la concavité de la surface, et l'autre est relatif à la partie de cette droite qui tombe hors de la concavité. Comme on ne sait pas d'avance le sens dans lequel la force N exerce son action, on ne peut pas décider lequel de ces deux signes on doit employer; mais si l'on substitue ces valeurs de $\cos.\varepsilon$, $\cos.\varepsilon'$, $\cos.\varepsilon''$ dans les équations (4), et que l'on élimine entre elles, l'inconnue N,

il est évident que la quantité V s'en ira en même tems : il restera deux équations de condition qui seront les équations d'équilibre des forces P, P', P'', etc.

Si la position du point m n'était pas donnée sur la surface; que l'on demandât, au contraire, où ce point doit être placé sur cette surface pour s'y tenir en équilibre sous l'action des forces P, P', P'', etc. : les deux équations de condition, résultant de l'élimination de N, jointes à l'équation $L=0$, détermineraient les trois coordonnées du point cherché.

24. Lorsque le point m sera seulement posé sur la surface, il ne suffira plus que les deux équations d'équilibre soient satisfaites par les forces P, P', P'', etc., ou par les coordonnées de ce point matériel : il faudra encore que la direction de la résultante de ces forces soit telle qu'elle appuie le point sur la surface donnée, à laquelle elle est normale; or, cette résultante étant égale et contraire à la force N (n° 23), on s'assurera que cette condition est remplie, en cherchant le sens dans lequel cette dernière force agit.

Pour cela, supposons que l'axe mA auquel se rapportent les angles $\varepsilon, \alpha, \alpha', \alpha''$, etc., coïncide avec la partie de la normale qui tombe dans la concavité de la surface. Les deux autres axes mB et mC seront dirigés dans le plan tangent; nous aurons $\varepsilon'=100°$, $\varepsilon''=100°$; l'angle ε sera nul ou égal à $200°$, selon que la force inconnue N agira suivant cette partie de la normale, ou en sens contraire. Ainsi l'on aura

$\cos.\varepsilon = \pm 1$; le signe supérieur ayant lieu dans le premier cas, et l'inférieur, dans le second. Les équations (4) deviendront donc

$$\pm N + P.\cos.\alpha + P'.\cos.\alpha' + \text{etc.} = 0,$$
$$P.\cos.\beta + P'.\cos.\beta' + \text{etc.} = 0,$$
$$P.\cos.\gamma + P'.\cos.\gamma' + \text{etc.} = 0.$$

Les deux dernières, dans lesquelles n'entre plus l'inconnue N, sont les équations d'équilibre. Elles expriment que les composantes des forces P, P', P'', etc., dirigées dans le plan tangent à la surface donnée, se détruisent entre elles, indépendamment des composantes normales; ce qui est, en effet, la condition nécessaire pour que le point d'application ne puisse pas glisser sur la surface donnée.

La première déterminera la valeur de N, et fera en même tems connaître le sens dans lequel cette force agit. En effet, le signe de chacune des composantes $P.\cos.\alpha$, $P'.\cos.\alpha'$, etc. est déterminé; celui de leur somme l'est donc aussi; or la valeur de N devant être une quantité positive, il faut qu'elle soit précédée, dans cette première équation, d'un signe contraire à celui de cette somme; d'où il suit que la force N agira suivant la partie de la normale qui tombe dans la concavité de la surface donnée, quand la somme des composantes normales sera négative, et suivant l'autre partie, quand cette somme sera positive; car, dans le premier cas, N devra être précédée du signe $+$, ce qui exige qu'on ait $\cos.\varepsilon = +1$, et dans le second cas, N devra être précédée du signe $-$, ce qui suppose $\cos.\varepsilon = -1$.

Dans l'un et l'autre cas, elle sera égale à cette somme, abstraction faite du signe.

La résultante des forces P, P', P'', etc., qui est égale à la force N, sera donc égale à la somme des composantes normales qui agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent en sens contraire; et elle agira dans le sens de la plus grande somme : résultat évident en lui-même, puisque les composantes dirigées dans le plan tangent se détruisent entre elles.

Cette résultante est la mesure de la *pression* que supporte la surface donnée. Si le point matériel sur lequel elle agit est placé dans la concavité de la surface, il faudra que cette pression s'exerce de dedans en dehors; s'il est posé sur la convexité, la surface devra être pressée de dehors en dedans.

25. Supposons maintenant le point matériel sur lequel agissent les forces P, P', P'', etc., assujéti à rester sur deux surfaces données, ou sur leur courbe d'intersection. Il suffira pour l'équilibre, que la résultante de ces forces puisse se décomposer en deux forces perpendiculaires aux surfaces données, et qui seront détruites par leur résistance. En ajoutant donc aux forces P, P', P'', etc., deux nouvelles forces normales à ces surfaces, mais inconnues en grandeur, on pourra faire abstraction des surfaces, et considérer le point matériel comme libre.

N et N' étant ces nouvelles forces; $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, les angles qui déterminent la direction de N, par rapport aux axes mA, mB, mC; $\varphi, \varphi', \varphi''$, ceux qui dé-

terminent la direction de N par rapport aux mêmes axes; les équations (3) du n° 17 deviendront

$$\left.\begin{array}{l} N.\cos.\varepsilon + N'.\cos.\varphi + P.\cos.\alpha + P'.\cos.\alpha' + \text{etc.} = 0, \\ N.\cos.\varepsilon' + N'.\cos.\varphi' + P.\cos.6 + P'.\cos.6' + \text{etc.} = 0, \\ N.\cos.\varepsilon'' + N''.\cos.\varphi'' + P.\cos.\gamma + P'.\cos.\gamma' + \text{etc.} = 0. \end{array}\right\} (5)$$

D'ailleurs, en représentant par $L=0$, $L'=0$, les équations des deux surfaces données; par x, y, z, les coordonnées du point m, rapportées à des axes parallèles à mA, mB, mC, on aura

$$\cos.\varepsilon = V.\frac{dL}{dx}, \quad \cos.\varepsilon' = V.\frac{dL}{dy}, \quad \cos.\varepsilon'' = V.\frac{dL}{dz};$$
$$\cos.\varphi = V'.\frac{dL'}{dx}, \quad \cos.\varphi' = V'.\frac{dL'}{dy}, \quad \cos.\varphi'' = V'.\frac{dL'}{dz};$$

en faisant, pour abréger,

$$V = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}};$$
$$V' = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz}\right)^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans les trois équations précédentes, et éliminant ensuite N et N' entre elles, ce qui fera aussi disparaître V et V', on aura l'équation d'équilibre, à laquelle devront satisfaire les forces P, P', P'', etc.; ou bien, si la position de leur point d'application n'est pas donnée sur l'intersection des deux surfaces, cette équation de condition et les équations de ces surfaces détermineront les coordonnées de ce point.

26.

26. On obtient immédiatement l'équation d'équilibre des forces P, P', P'', etc., en prenant les axes mB et mC, auxquels se rapportent les angles ε', φ', β, β', etc.; ε'', φ'', γ, γ', etc., dans le plan des normales aux deux surfaces données. Le troisième axe mA tombe alors sur la tangente à la courbe d'intersection; il est donc perpendiculaire aux forces normales N et N'; de sorte qu'on a $\varepsilon = 100°$, $\varphi = 100°$, et par conséquent

$$P.\cos.\alpha + P'.\cos.\alpha' + \text{etc.} = 0,$$

pour l'équation d'équilibre demandée.

Cette équation exprime que la somme des composantes des forces P, P', P'', etc., tangentes à l'intersection des surfaces données, est égale à zéro; ce qui est en effet la condition nécessaire pour que le point m ne puisse pas glisser sur cette courbe. Après s'être assuré qu'elle est remplie, on déterminera les valeurs des forces N et N', et le sens dans lequel elles agissent, au moyen des deux dernières des équations (5). Si l'on prend ensuite des forces égales et contraires à N et N', et qu'on les réduise en une seule, par la règle du parallélogramme des forces (n° 16), celle-ci sera la résultante des forces P, P', P'', etc., et la mesure de la pression qui s'exerce sur la courbe donnée, à laquelle elle est perpendiculaire.

CHAPITRE II.

DE L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE.

27. Ce qui précède renferme toute la statique d'un point matériel. Nous allons, dans ce chapitre, chercher les conditions d'équilibre d'un système de points liés entre eux d'une manière invariable, et soumis à l'action de forces quelconques. Mais pour procéder du plus simple au plus composé, nous examinerons d'abord deux cas particuliers; celui où les forces données sont toutes parallèles entre elles, et celui où elles sont toutes dirigées dans un même plan. Nous ferons voir ensuite que le cas général peut toujours se ramener à ces deux systèmes de forces.

§. I. *Composition et Équilibre des forces parallèles.*

28. Maintenant que nous allons considérer des forces agissant sur différens points, nous aurons souvent besoin de déplacer les points d'application d'une ou de plusieurs de ces forces. Or, on ne change rien à l'action d'une force en transportant son point d'application en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce second point soit censé attaché au premier par une droite inflexible, et que l'intensité et la direction de la force soient restées les mêmes. Ainsi, par exemple, si une force donnée P

agit au point m, suivant la direction mA (fig. 7), on peut lui substituer une force égale et de même direction, appliquée au point m' que je prends au hasard sur la ligne mA, et que je suppose lié au point m par la droite inflexible mm'. En effet, il est permis d'appliquer au point m', deux forces égales entre elles et agissant en sens contraire, savoir, l'une dans la direction $m'm$, et l'autre dans la direction $m'A$; car ces deux forces se détruisent immédiatement, et le système dont la force P fait partie reste le même qu'auparavant; mais si l'on suppose de plus que chacune des forces ajoutées est égale à la force P, il arrivera que la force ajoutée qui agit au point m' suivant la direction $m'm$, détruira la force donnée qui agit au point m dans la direction mm', puisque ces deux forces égales agissent en sens contraires aux extrémités d'une droite inflexible; il restera donc l'autre force ajoutée, agissant au point m' suivant la direction $m'A$, et qui peut être considérée comme étant la force donnée P dont on a transporté le point d'application de m en m' sans changer sa direction. Nous avons supposé que le point m' était pris sur la ligne mA; il pourrait se trouver sur son prolongement, comme le point K, par exemple, et l'on prouverait, par un raisonnement semblable, qu'il est permis d'y transporter le point d'application de la force P : la direction de cette force serait alors la ligne KA.

Dans un grand nombre de cas, les forces agissent sur les corps qu'elles mettent en mouvement ou qu'elles tendent à mouvoir, soit en les tirant par le

moyen d'un fil qui leur est attaché, soit en les poussant par l'intermédiaire d'une droite inflexible, appuyée sur leur surface; ce fil ou cette droite représente alors la direction de la force, et ne change rien à son action qui reste la même, d'après ce que nous venons de prouver, que si la force était immédiatement appliquée au point du mobile auquel le fil ou la droite vient aboutir.

29. En déplaçant ainsi les points d'application, nous pouvons étendre la règle du parallélogramme des forces au cas de deux forces dirigées dans un même plan et appliquées aux extrémités d'une droite inflexible.

En effet, soient *mn* cette droite (fig. 7), *mA* et *nB* les directions des deux forces données; je les prolonge jusqu'au point *K* où elles se coupent, et en supposant ce point fixement attaché à la ligne *mn*, je puis le prendre pour le point d'application commun aux deux forces; portant donc à partir de ce point, sur les directions *KA* et *KB*, des lignes *Ka* et *Kb* qui soient entre elles comme les forces données, et achevant le parallélogramme *Kacb*, la diagonale *Kc* représente, en grandeur et en direction, la résultante demandée. Le point *O*, où le prolongement de cette ligne coupe la droite *mn*, est le point d'application de cette résultante sur cette droite, et la ligne *OC* représente sa direction.

30. Désignons par P et Q les deux composantes; la proportion supposée

$$P : Q :: aK : bK,$$

peut être changée en celle-ci

$$P : Q :: \sin.BKC : \sin.AKC;$$

mais si l'on abaisse du point O de la résultante, des perpendiculaires Op et Oq sur les directions des forces P et Q, on aura

$$Op = KO.\sin.AKC, \quad Oq = KO.\sin.BKC;$$

d'où l'on conclut

$$P : Q :: Oq : Op;$$

donc les deux composantes sont entre elles en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur leurs directions, d'un point quelconque de la résultante.

On démontrerait semblablement que la résultante et l'une des composantes sont entre elles en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur leurs directions, d'un point quelconque de l'autre composante.

31. Ce théorème ayant lieu, quelque petit que soit l'angle AKB des deux composantes, il s'ensuit qu'il subsiste encore à la limite, où l'angle devient nul et où les forces deviennent parallèles. Ainsi, supposons que la direction de la force Q tourne autour du point n, jusqu'à ce qu'elle tombe sur la ligne nB' parallèle à la direction mA de la force P; de sorte que ces forces soient maintenant parallèles et dirigées dans le même sens; dans cet état la perpendiculaire abaissée du point O sur la direction nB' sera le prolongement Oq' de la perpendiculaire Op, abaissée du même point sur la

direction mA; et il sera toujours vrai de dire que les forces P et Q sont entre elles comme les perpendiculaires Oq' et Op; de manière que le point O partage la ligne pq', en deux parties réciproquement proportionnelles à ces forces.

On conclut de là, cette proportion :

$$P : P + Q :: Oq' : Oq' + Op;$$

si donc on appelle a la droite pq' qui mesure la distance mutuelle des deux parallèles mA et nB', on aura

$$a = pq' = Oq' + Op,$$

et par conséquent

$$Oq' = \frac{aP}{P+Q};$$

or, cette ligne Oq' exprime la distance d'un point quelconque de la résultante à la droite nB'; sa valeur, qui ne dépend que des quantités données a, P, Q, est la même quel que soit ce point; il s'ensuit donc que la direction de la résultante est une droite OC', parallèle à nB', ou à la direction des composantes.

La valeur de cette force est une conséquence de sa direction. En effet, les lignes nB' et OC' étant parallèles, la ligne Oq' perpendiculaire à la première, l'est aussi à la seconde; mais en étendant le théorème du numéro précédent au cas des forces parallèles, la résultante et la composante P doivent être entre elles en raison inverse des perpendiculaires abaissées du point q' de la composante Q, sur

leurs directions; d'où l'on conclut, R étant la résultante,

$$P : R :: Oq' : pq';$$

donc à cause de $pq' = Oq' + Op$, cette proportion comparée à la précédente, donne

$$R = P + Q.$$

On voit donc, 1°. *que la résultante de deux forces parallèles, agissant dans le même sens, partage la distance mutuelle des composantes en deux parties réciproquement proportionnelles à ces forces;* 2°. *que cette résultante est parallèle aux composantes;* 3°. *qu'elle est égale à leur somme.*

32. Il était bon de montrer comment la composition des forces parallèles est comprise, comme cas particulier, dans celles des forces qui concourent vers un point; et quoique nous n'ayons considéré que le cas de deux forces agissant dans le même sens, il n'est pas difficile de voir que le même raisonnement pourrait s'étendre au cas où les composantes agissent en sens contraires; mais nous croyons plus utile de faire connaître un moyen de trouver la résultante de deux forces parallèles, qui pourra nous servir dans plusieurs autres occasions.

Soient donc P et Q les deux composantes, agissant aux points m et n de la droite mn (fig. 8), suivant les directions mA et nB, parallèles et de même sens. On ne changera rien à ce système de forces, en appliquant aux extrémités de cette droite, deux forces égales, dirigées en sens contraires l'une

de l'autre, suivant ses prolongemens mm' et nn', et dont l'intensité commune sera représentée par S; la résultante des deux forces S et des forces P et Q, sera la résultante cherchée; or, si l'on compose ensemble les forces S et P, appliquées au point m, on aura une force que j'appellerai P', dirigée suivant une certaine droite mA' comprise dans l'angle $m'mA$; de même la résultante des forces Q et S, appliquées au point n, sera une force Q', dirigée dans l'angle $n'nB$, suivant une droite telle que nB': ces deux droites mA' et nB' n'étant pas parallèles, se couperont en un point K, et il est permis de le prendre pour le point d'application, commun aux deux forces P' et Q' (n° 28). Par ce point, je mène les lignes $m''n''$ et KC, parallèles à la droite mn et à la direction des forces P,Q; puis je décompose les forces P' et Q' suivant ces parallèles : il est évident qu'on retrouvera de cette manière les composantes P et S, dirigées suivant KC et Km'', et les composantes Q et S, dirigées suivant KC et Kn''. Nous avons donc les quatre mêmes forces qu'auparavant, mais appliquées toutes quatre au point K: en supprimant les deux forces S, égales et contraires, il restera les forces P et Q, dirigées suivant une même droite KC, et dont la résultante est égale à $P+Q$; d'où il suit que la résultante cherchée est parallèle aux composantes et égale à leur somme.

Pour déterminer le point O où sa direction KC coupe la ligne mn, je prolonge les lignes Am et Bn jusqu'à ce qu'elles rencontrent la ligne $m''n''$ aux points m'' et n''; les deux quadrilatères $mm''KO$ et

$nn''KO$, sont des parallélogrammes; si donc on prend la diagonale Km, pour représenter la force P', ses composantes S et P seront entre elles comme les côtés $m''K$ et KO; et de même, si l'on représente la force Q' par la diagonale Kn, ses composantes S et Q seront proportionnelles aux côtés $n''K$ et KO; donc, à cause de $m''K = mO$, $n''K = nO$, on aura ces deux proportions :

$$S : P :: mO : KO,$$
$$S : Q :: nO : KO;$$

d'où l'on conclut

$$P : Q :: nO : mO;$$

ce qui montre que le point O coupe la ligne mn en deux parties mO et nO, réciproquement proportionnelles aux forces P et Q, ce qui servira à déterminer sa position sur la ligne mn.

On peut observer que cette proportion est indépendante de l'angle sous lequel la ligne mn coupe les parallèles mA et mB de manière qu'elle a lieu pour toute droite menée au hasard par le point O, et aboutissant, de part et d'autre, à ces deux lignes.

Cette proportion donne ces deux autres :

$$P : P+Q :: nO : mn,$$
$$Q : P+Q :: mO : mn;$$

donc, à cause que la résultante R est égale à $P+Q$, on aura

$$P : Q : R :: nO : mO : mn;$$

où l'on voit que chacune des trois forces P, Q, R est proportionnelle à la partie de la ligne mn, comprise entre les directions des deux autres.

33. Ce dernier résultat, énoncé de cette manière, convient également au cas où les composantes P et Q sont dirigées en sens contraires. En effet, soit, dans ce cas, mA et nB (fig. 9), les directions de ces forces, et pour fixer les idées, supposons $Q > P$. Décomposons la force Q en deux forces parallèles, agissant dans le même sens, dont l'une soit égale et contraire à la force P, et dont l'autre soit une force inconnue. La direction de la première sera la ligne mA'; représentons par OC la direction inconnue de la seconde, et sa grandeur par R. La force Q étant la résultante des forces P et R, qui agissent dans le même sens, on aura, d'après ce qui précède,

$$Q = P + R, \quad \text{ou} \quad R = Q - P;$$

et, de plus,

$$P : R : Q :: nO : mn : mO.$$

Or, en substituant à la force Q ses deux composantes, les deux forces données P et Q se trouveront remplacées par trois forces, savoir, les deux forces P appliquées au point m, et la force R appliquée au point O : les deux premières se détruisent; il ne reste que la force R, qui équivaut à elle seule, aux deux forces données, et qui est par conséquent leur résultante. Donc, dans le cas que nous examinons, la résultante est égale à la différence

des deux composantes, elle agit dans le sens de la plus grande, et l'on a entre ces trois forces et les droites mO, nO, mn, interceptées entre leurs directions, les mêmes rapports que précédemment.

34. On résoudra maintenant, sans peine, tous les problèmes qu'on peut proposer sur la composition et la décomposition des forces parallèles, et nous croyons superflu d'entrer dans aucun détail à ce sujet; mais le cas des forces qui agissent en sens opposés, présente une circonstance particulière qu'il est important de faire remarquer.

Dans ce cas, la proportion

$$P : R :: nO : mn,$$

donne, en y mettant pour R sa valeur $Q-P$,

$$nO = \frac{P}{Q-P}.mn;$$

or, cette valeur de nO fait voir que quand les forces Q et P sont dirigées en sens contraires, le point O, qui est le point d'application de leur résultante sur la droite mn, s'éloigne indéfiniment à mesure que la force Q approche d'être égale à la force P; en même tems la résultante diminue, et enfin, lorsqu'on a $Q=P$, le calcul donne une résultante nulle, placée à une distance infinie des composantes.

Mais dans la réalité, deux forces parallèles, égales et contraires, mais non directement opposées, n'ont pas de résultante; et en effet, si elles pouvaient être remplacées par une force unique, il n'y aurait pas de raison pour que celle-ci agît plutôt dans le sens

de l'une des forces égales que dans le sens de l'autre; car tout est absolument semblable par rapport à ces deux forces. Au reste, ce cas est le seul où deux forces parallèles ne puissent pas être réduites en une seule.

35. Considérons actuellement un nombre quelconque de forces parallèles dont une partie agit dans un sens et l'autre dans le sens opposé, qui sont situées ou non situées dans un même plan, et appliquées à des points invariablement liés entre eux, par exemple, à différens points d'un corps solide.

En composant deux de ces forces en une seule, puis celle-ci et une troisième encore en une seule, et ainsi de suite, on parviendra à déterminer la grandeur et la position dans l'espace de la résultante de toutes les forces données, à moins que les deux dernières forces qu'on aura à considérer, ne tombent dans le cas d'exception du numéro précédent. Cette résultante sera évidemment parallèle à la direction commune des composantes; de plus, elle sera égale à la somme de celles qui agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent en sens contraire, et elle agira dans le sens de la plus grande somme. Si donc on regarde les unes comme positives et les autres comme négatives (n° 10), et qu'on les représente toutes par P, P', P'', etc., et leur résultante, par R, on aura toujours

$$R = P + P' + P'' + \text{etc.}$$

36. Si les forces données viennent à tourner au-

tour de leurs points d'application, sans cesser d'être parallèles, la résultante tournera pareillement autour d'un des points de sa direction; car son point d'application qu'on trouve en composant deux à deux les forces données, ne dépend en aucune manière de la direction commune de ces forces; de sorte qu'il reste le même quand cette direction vient à changer.

Ainsi, par exemple, supposons que les forces parallèles sont au nombre de trois, P, P' et P'', dirigées suivant les droites mA, $m'A'$ et $m''A''$ (fig. 10); soit d'abord nB la direction de la résultante de P et P', qui sera égale à $P+P'$; soit ensuite $n'B'$ la direction de la résultante des forces $P+P'$ et P'', et observons que la figure suppose que P'' agit en sens contraire de P et de P', et qu'on a $P'' > P+P'$. Maintenant, concevons que les trois forces P, P' et P'' tournent autour des points m, m', m'', en conservant leur parallélisme et le sens dans lequel chacune d'elles est dirigée, et soient ma, $m'a'$, $m''a''$, leurs nouvelles directions. Dans ce nouvel état, la résultante des forces P et P' rencontrera la droite mm' au même point n qu'auparavant, puisque la position de ce point ne dépend que du rapport des composantes et est indépendante de l'angle que la droite mm' fait avec leur direction (n° 32). Par la même raison, la résultante de $P+P'$ et P'' rencontrera toujours le prolongement de la droite nm'' au même point n'; par conséquent les trois forces données, tournant autour des points m, m' et m'', leur résultante tournera de même autour du point n'.

37. Nous appellerons *centre des forces parallèles*, le point dans lequel viennent se couper toutes les directions successives de la résultante, quand les composantes tournent autour de leurs points d'application respectifs.

D'après cette définition, il est évident que si un corps solide est sollicité par un nombre quelconque de forces parallèles, que l'on détermine le centre de ces forces et qu'on le suppose fixe, l'équilibre aura lieu dans toutes les positions que le corps peut prendre autour de ce point, pourvu que les forces données restent toujours parallèles et appliquées aux mêmes points du corps; car alors leur résultante passera constamment par le point fixe, ce qui suffit pour qu'elle soit détruite.

On verra, par la suite, combien le centre des forces parallèles est important à considérer dans les questions relatives à l'équilibre et au mouvement des corps pesans. En attendant, nous allons déterminer ses trois coordonnées en fonction de celles des points d'application des composantes.

38. Désignons par m, m', m'', etc. (fig. 11), les points d'application des forces P, P', P'', etc.; menons arbitrairement trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, qui seront ceux des coordonnées; soient x, y, z, les coordonnées du point m, respectivement parallèles à ces axes; x', y', z', celles de m'; x'', y'', z'', celles de m''; etc. Toutes ces quantités sont données, et peuvent être positives ou négatives suivant la position des points m, m', m'', etc., par

rapport aux plans des coordonnées. Désignons encore par p, p', p'', etc., les projections de m, m', m'', etc., sur le plan des x, y ; de sorte qu'on ait

$$z = mp, \quad z' = m'p', \quad z'' = m''p'', \quad \text{etc.}$$

Enfin, représentons, par $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, les coordonnées du centre des forces parallèles, dont il s'agit de trouver les valeurs.

Considérons d'abord les deux forces P et P'. Soit n, le point où leur résultante coupe la droite mm' ; soit aussi q, la projection du point n, sur le plan des x, y ; par le point m, menons une parallèle à la ligne pp', qui rencontre la ligne nq, en un point a, et la ligne $m'p'$, en un point b : nous aurons

$$m'm : nm :: m'b : na.$$

Or, d'après le n° 32, nous avons

$$m'm : nm :: P + P' : P' ;$$

de ces deux proportions, on conclut

$$(P + P').na = P'.m'b ;$$

mais, à cause de $aq = bp' = mp$, on a l'équation identique

$$(P + P').aq = P.mp + P'.bp' ;$$

ajoutant ces deux équations, il vient

$$(P + P').nq = P.mp + P'.m'p' = Pz + P'z'. \quad (1)$$

La figure suppose les deux forces P et P' dirigées dans le même sens, et les trois points m, m' et n, au-dessus du plan xOy ; mais si ces forces agissaient

en sens contraire l'une de l'autre, ou bien que ces points tombassent de différens côtés du plan, il est aisé de s'assurer que l'équation (1) subsisterait également, en ayant égard aux signes des quantités qu'elles renferment.

Cela posé, joignons le point n au point m'', et soit n', le point d'application de la résultante des forces $P+P'$ et P'', sur la droite nm''; soit de plus q', la projection de ce point sur le plan des x, y; l'équation (1) deviendra, relativement à ces forces et à leur résultante $P+P'+P''$,

$$(P+P'+P'').n'q'=(P+P').nq+P''z''.$$

Joignons encore le point n' au point m'''; soit n'', le point où la résultante des forces $P+P'+P''$ et P''', coupe la droite $n'm'''$, et q'', sa projection sur le plan des x, y: nous aurons, en vertu de l'équation (1) appliquée à ces forces,

$$(P+P'+P''+P''').n''q''=(P+P'+P'').n'q'+P'''z'''.$$

Pour fixer les idées, supposons que les forces parallèles que l'on considère sont au nombre de quatre; en sorte que n'' soit le centre des forces parallèles dont on cherche les coordonnées, et qu'on ait $n''q''=z_{,}$. En ajoutant les trois dernières équations, il vient

$$(P+P'+P''+P''').z_{,}=Pz+P'z'+P''z''+P'''z''',$$

équation qui donne la valeur de $z_{,}$, et qu'on peut étendre à un nombre quelconque de forces parallèles P, P', P'', P''', etc., positives ou négatives, aussi bien que

que les coordonnées z, z', z'', etc. En substituant dans son premier membre, la résultante R à la place de la somme des composantes, nous aurons généralement

$$Rz_{,} = Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.}$$

39. On appelle *moment d'une force par rapport a un plan,* le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur ce plan. Ainsi, $Rz_{,}$, Pz, $P'z'$, etc. sont les momens des forces R, P, P', etc., par rapport au plan xOy, et l'équation qu'on vient de trouver renferme ce théorème :

Le moment de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles, par rapport à un plan choisi arbitrairement, est égal à la somme des momens de ces forces, par rapport au même plan.

Ces momens peuvent être positifs ou négatifs : ils sont positifs, quand la force et l'ordonnée de son point d'application sont de même signe ; négatifs, dans le cas contraire.

40. En prenant de même les momens des forces P, P', P'', etc., par rapport aux plans des x, z et des y, z, on aura

$$Ry_{,} = Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.}$$
$$Rx_{,} = Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.}$$

Ces deux équations, jointes à la précédente, détermineront, d'une manière fort simple, la position du centre des forces parallèles, c'est-à-dire, les va-

leurs de ses trois coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$. En menant, par ce point, une parallèle à la direction commune des forces, on aura la position de leur résultante; le signe de la valeur trouvée plus haut (n°35), fera connaître le sens dans lequel elle agit suivant cette ligne.

La somme des momens des forces P, P', etc. est nulle par rapport à tout plan passant par le centre des forces parallèles; car en prenant ce plan pour celui des x, y, on devra avoir $z_{,}=0$; d'où l'on conclut

$$Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.} = 0.$$

Au reste, le centre des forces parallèles suppose toutes les forces données, réductibles à une seule; il n'existe pas quand ces forces se réduisent à deux, égales et contraires, mais non directement opposées; et en effet, le calcul donne, dans ce cas, des valeurs infinies pour les coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$; puisqu'alors la somme des quantités P, P', P'', etc. est égale à zéro, ce qui rend nul le dénominateur R commun à ces valeurs.

41. Lorsque tous les points d'application m, m', m'', etc. sont situés dans un plan donné, le centre des forces parallèles, s'il existe, est aussi compris dans ce plan, et sa position ne dépend plus que de deux coordonnées. On peut prendre le plan donné pour celui des x, y; on a alors $z=0$, $z'=0$, $z''=0$, etc.; par conséquent $z_{,}=0$, et les valeurs de $x_{,}$ et $y_{,}$ sont déterminées par les deux équations du n° précédent.

Si tous ces points m, m', m'', etc. sont rangés sur

une même droite, cette ligne contiendra le centre des forces parallèles, et pour le trouver, il suffira de déterminer sa distance à un point de cette même droite. En la prenant donc pour l'axe Ox, on aura $y=0$, $y'=0$, etc.; $z=0$, $z'=0$, etc.; donc $y_{,}=0$, $z_{,}=0$, et la valeur de $x_{,}$ sera donnée par cette équation

$$Px_{,}=Px+P'x'+P''x''+\text{etc.}$$

Supposons, par exemple, que les forces P, P', P'', etc. sont au nombre de cinq, disposées comme dans la figure 12; si nous regardons les distances Om, Om', Om'', ou x, x', x'', comme positives, il faudra regarder les distances Om''', Om^{iv}, ou x''', x^{iv}, comme négatives; et de même les forces P, P'', P^{iv} qui agissent suivant les droites mA, $m''A''$, $m^{\text{iv}}A^{\text{iv}}$, étant positives, les forces P' et P''' qui agissent dans le sens opposé, suivant les droites $m'A'$, $m'''A'''$, seront négatives. Soit en outre

$$Om=1,\quad Om'=3,\quad Om''=5,\quad Om'''=-2,\quad Om^{\text{iv}}=-3,$$
$$P=1,\quad P'=-5,\quad P''=6,\quad P'''=-4,\quad P^{\text{iv}}=4,$$

les valeurs numériques de ces forces et de ces lignes; nous aurons

$$R=P+P'+P''+P'''+P^{\text{iv}}=2;$$

et de plus

$$2x_{,}=1-15+30+8-12=12;$$

d'où l'on tire $x_{,}=6$. Prenant donc, à partir du

point O, du côté des distances positives, une ligne On égale à 6, ou sextuple de Om, le point n sera le centre des forces parallèles, c'est-à-dire, le point où la résultante vient couper la ligne On. La valeur de R étant positive, la résultante agira dans le sens des forces P, P', P'', ou suivant la droite nB; et comme elle est représentée par le nombre 2, il s'ensuit qu'elle est double de la force P, prise pour unité.

42. Les conditions d'équilibre du système des forces parallèles P, P', P'', etc., se déduiront aisément de la théorie qu'on vient d'exposer. En effet, s'il n'existe aucun point fixe dans le système, il faut pour l'équilibre qu'en séparant une de ces forces, par exemple, la force P, toutes les autres aient une résultante égale et directement opposée à cette force. Soit donc R' la résultante des forces P', P'', etc.; puisque les forces P et R' sont égales et dirigées en sens contraires, les quantités P et R' doivent être égales et de signes différens; on doit donc avoir $P + R' = 0$; mais R' est égale à la somme des composantes P', P'', etc. (n° 35) : donc on a, pour première équation d'équilibre,

$$P + P' + P'' + \text{etc.} = 0. \qquad (1)$$

Il reste encore à exprimer que ces deux forces R' et P sont directement opposées.

Pour cela, soit α, $\mathcal{C}$, γ, les coordonnées du centre des forces parallèles P', P'', etc., de manière

qu'on ait

$$R'\alpha = P'x' + P''x'' + \text{etc.},$$
$$R'\mathcal{C} = P'y' + P''y'' + \text{etc.},$$
$$R'\gamma = P'z' + P''z'' + \text{etc.}$$

Ce centre est le point d'application de la résultante R'; il est donc nécessaire qu'il se trouve sur la direction de la force P, pour que R' soit directement opposée à cette force; ou, ce qui revient au même, ce centre et le point m, auquel est appliquée la force P, doivent être sur une même droite parallèle à la direction commune des forces données. Si donc on prend, pour simplifier, le plan des x, y perpendiculaire à cette direction, il faudra que ces deux points soient situés sur une même perpendiculaire à ce plan; ils auront alors la même projection sur ce plan; par conséquent leurs coordonnées parallèles aux axes des x et des y, seront les mêmes, c'est-à-dire, qu'on aura

$$\alpha = x, \quad \mathcal{C} = y.$$

Substituant donc x et y, à la place de α et $\mathcal{C}$, dans les deux premières équations précédentes, et observant que $R' = - P$, il vient

$$\left.\begin{aligned} Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.} = 0, \\ Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.} = 0; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

équations qui signifient que la somme des momens des forces P, P', P'', etc. est nulle, par rapport aux plans des x, z et des y, z, qui sont parallèles à leur direction.

Ainsi l'équilibre de ces forces exige que l'équa-

tion (1) et les équations (2) aient lieu en même temps. Réciproquement quand ces trois équations sont satisfaites, l'équilibre existe ; car si l'on considère la résultante R' de toutes ces forces moins une, on aura, en vertu des équations (2),

$$R'\alpha = -Px, \qquad R'\zeta = -Py;$$

et en vertu de l'équation (1),

$$R' = -P;$$

par conséquent

$$\alpha = x, \qquad \zeta = y;$$

d'où l'on peut conclure que cette résultante est égale et directement opposée à la force P qu'on avait omise.

Concluons donc que pour l'équilibre d'un système de forces parallèles, il est nécessaire et il suffit

1°. *Que la somme de ces forces soit égale à zéro;*

2°. *Que la somme de leurs momens soit nulle, par rapport à deux plans parallèles à leur direction.*

43. Si la seconde condition était seule remplie, les forces données auraient une résultante égale à leur somme, dont la direction coïnciderait avec l'intersection des deux plans; car si l'on cherche sa distance à chacun de ces plans, on la trouvera nulle, en vertu des équations (2). En supposant donc que cette intersection contienne un point fixe, la résultante sera détruite et l'équilibre aura lieu; d'où il suit que quand un corps solide, auquel sont appliqués des forces parallèles, est retenu par un point

fixe, il suffit pour l'équilibre, que la somme des momens de ces forces soit nulle par rapport à deux plans menés par ce point parallèlement à leur direction.

Lorsque ce point fixe sera le centre des forces parallèles, la somme des momens sera nulle par rapport à tous les plans menés par ce point (n° 40); par conséquent les forces se feront équilibre autour de ce point, quelle que soit leur direction commune, ce que nous savions déjà (n° 37).

§. II. *Composition et Équilibre des forces dirigées dans un même plan.*

44. Représentons toujours les forces données par P, P', P'', etc., et supposons-les dirigées dans un plan donné et appliquées à des points matériels, liés entre eux d'une manière invariable. Pour les réduire au moindre nombre possible, on prendra la résultante de P et P', en les prolongeant jusqu'à leur point de concours, comme dans le n° 29, ou bien en les traitant comme des forces parallèles, si effectivement elles sont parallèles; on réduira ensuite de la même manière cette résultante et la force P'', en une seule force; celle-ci et la force P''', de même en une seule force qui remplacera les quatre forces P, P', P'', P''': quand, par cette suite d'opérations, on aura épuisé toutes les forces données, la dernière résultante sera celle de ces forces.

Un système de forces dirigées dans un même plan, peut donc, en général, être remplacé par une force

unique. Je dis *en général*, car ce résultat est sujet à la même exception que la composition des forces parallèles. En effet, si les deux dernières forces dont on doit prendre la résultante, se trouvent égales, parallèles, dirigées en sens contraires sans être directement opposées, il sera impossible de les réduire en une seule, et l'on devra conserver ces deux forces pour remplacer les forces données.

Lorsque ces forces admettent une résultante, elle est nécessairement déterminée de grandeur et de position ; de sorte qu'on parviendra toujours à la même résultante définitive, quel que soit l'ordre dans lequel on prenne les forces P, P', P'', etc. ; car s'il existait deux forces différentes dont chacune fût équivalente à ce système de forces, il faudrait que l'une de ces deux résultantes, étant prise en sens contraire de sa direction, fît équilibre à l'autre, sans lui être égale et directement opposée, ce qui est impossible. Mais il n'en est plus de même quand les forces données se réduisent à deux forces parallèles, non réductibles à une seule : deux forces de cette espèce ne sont point déterminées en grandeur et en direction; au contraire, on s'assure aisément qu'elles peuvent être remplacées, d'une infinité de manières différentes, par deux autres forces de la même espèce, qui leur sont équivalentes, et qui n'ont cependant ni la même direction, ni la même grandeur que les premières.

45. Maintenant cherchons la valeur de la résultante des forces P, P', P'', etc., quand elles en ont

une, et l'équation de la droite suivant laquelle elle agit.

Soient m, m', m'', etc. (fig. 13), les points d'application des forces P, P', P'', etc.; $mC, m'C', m''C''$, etc., leurs directions; dans le plan qui contient toutes ces lignes, menons deux axes rectangulaires Ox et Oy; désignons par x et y, les coordonnées de m rapportées à ces axes; par x' et y', celles de m'; par x'' et y'', celles de m''; etc. Conformément au n° 9, concevons, par chacun des points m, m', etc., des droites parallèles à ces axes, et dirigées dans le sens des coordonnées positives: ces droites sont mA et mB pour le point m: les angles AmC et BmC serviront donc à fixer la direction mC, et nous supposerons $AmC = \alpha$, $BmC = \beta$. Nous représenterons de même par α' et β', les angles relatifs à la direction $m'C'$, qui sont $A'm'C'$ et $B'm'C'$; par α'' et β'', les angles $A''m''C''$ et $B''m''C''$, qui déterminent la direction $m''C''$; etc. Tous ces angles peuvent être aigus ou obtus; ils sont censés donnés, ainsi que les coordonnées des points m, m', m'', etc., et les quantités P, P', P'', etc.

Cela posé, je décompose chacune des forces P, P', P'', etc. en deux forces, l'une parallèle à l'axe Ox, l'autre parallèle à l'axe Oy: les composantes de la force P sont $P.\cos.\alpha$ et $P.\cos.\beta$ (n° 20); celles de P' sont $P'.\cos.\alpha'$ et $P'.\cos.\beta'$; etc. De cette manière, les forces données sont remplacées par deux systèmes de forces parallèles. Soit X, la résultante des composantes parallèles à Ox, et Y,

celle des composantes parallèles à Oy : nous aurons (n° 35)

$$X = P.\cos.\alpha + P'.\cos.\alpha' + P''.\cos.\alpha'' + \text{etc.}$$
$$Y = P.\cos.\beta + P'.\cos.\beta' + P''.\cos.\beta'' + \text{etc.}$$

Désignons en outre par $y_{,}$, l'ordonnée du point où la force X coupe l'axe Oy. Il est permis de prendre pour points d'application des composantes de cette force, les points où leurs directions viennent couper ce même axe. Alors tous les points d'application étant rangés sur la droite Oy, à des distances y, y', y'', etc. du point O, on aura, d'après le n° 41,

$$Xy_{,} = yP.\cos.\alpha + y'P'.\cos.\alpha' + y''P''.\cos.\alpha'' + \text{etc.}$$

Et de même, en appelant $x_{,}$, l'ordonnée du point où la force Y rencontre l'axe Ox, on aura

$$Yx_{,} = xP.\cos.\beta + x'P'.\cos.\beta' + x''P''.\cos.\beta'' + \text{etc.}$$

Les valeurs de $x_{,}$ et de $y_{,}$ étant données par ces deux équations, nous connaîtrons les parallèles aux axes Ox et Oy, suivant lesquelles agissent les forces X et Y; je suppose que nE et nF sont ces deux droites, qui se coupent au point n, que je prends pour leur point commun d'application; je cherche ensuite leur résultante par la règle connue : en appelant R, cette résultante, a et b, les angles que sa direction inconnue fait avec les droites nE et nF, et en observant que l'angle EnF est droit, on aura (n° 20)

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \cos.a = \frac{X}{R}, \quad \cos.b = \frac{Y}{R}.$$

Cette résultante R est celle de toutes les forces données P, P', P'', etc.; or, puisque les valeurs de X et Y sont déterminées, en fonction de quantités données, il s'ensuit que la valeur de R et des angles a et b relatifs à sa direction, sont aussi connus; de plus, nous connaissons les coordonnées $x_{,}$ et $y_{,}$ d'un point n de cette direction; par conséquent cette force est complètement déterminée de grandeur et de position.

46. On déduit immédiatement de cette détermination, l'équation de la droite suivant laquelle la résultante est dirigée: la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'axe Ox, est évidemment exprimée par le rapport $\frac{\cos. b}{\cos. a}$, qui est égal à $\frac{Y}{X}$, d'après nos équations; d'ailleurs elle doit passer par le point n, dont les coordonnées sont $x_{,}$ et $y_{,}$; donc en appelant s et t, les coordonnées d'un point quelconque, son équation sera

$$t - y_{,} = \frac{Y}{X} \cdot (s - x_{,});$$

ou, ce qui est la même chose,

$$Xt - Ys = Xy_{,} - Yx_{,}.$$

Mais en faisant, pour abréger,

$$L = P(y . \cos. \alpha - x . \cos. 6) + P'(y' . \cos. \alpha' - x' . \cos. 6') + \text{etc.},$$

les valeurs précédentes de $Xy_{,}$ et $Yx_{,}$, donneront $Xy_{,} - Yx_{,} = L$; par conséquent l'équation de la résultante deviendra

$$Xt - Ys = L. \qquad (1)$$

Cette équation étant construite, fera connaître la position de la résultante dans le plan des composantes; mais on ignorera encore le sens de son action suivant la droite construite, et pour le déterminer, il faudra faire attention au signe de cos. a ou de cos. b, ou bien à celui de X ou de Y.

47. Toute cette analyse suppose les composantes parallèles à Ox, réductibles à une seule force, ainsi que les composantes parallèles à l'axe Oy; il faut donc, pour la compléter, examiner les cas particuliers où ces réductions sont impossibles.

Lorsque ces deux systèmes de forces parallèles se réduisent chacun à deux forces égales et contraires, mais non directement opposées, on voit sans peine que ces quatre forces peuvent être réduites à deux, qui seront parallèles, égales et contraires, et qui ne se trouveront point, en général, directement opposées; par conséquent les forces données n'admettent point, dans ce cas, une résultante unique. On a alors, à-la-fois, $X=0$ et $Y=0$; les équations du n° 45 donnent donc

$$R=0, \qquad x_{,}=\frac{1}{0}, \qquad y_{,}=\frac{1}{0};$$

c'est-à-dire, que le calcul donne alors, comme il arrive toujours en pareil cas (n° 34), une résultante nulle, située à une distance infinie des composantes.

Si les forces parallèles à l'axe des x ont une résultante qui sera égale à leur somme X, et que les forces parallèles à l'axe des y se réduisent à deux, égales et contraires, ces trois forces se réduiront

facilement à une seule que l'on trouvera égale et parallèle à X. En effet, soit gE (fig. 14), la direction de la force X; kF et $k'F'$, les directions contraires des deux forces parallèles à l'axe Oy; g, le point d'intersection des deux lignes kF et gE, que nous choisirons pour point d'application des forces dirigées suivant ces droites. Prenons la résultante de ces deux forces, et supposons que gD soit sa direction, qui rencontre la droite $k'F'$ au point g'; transportons-y son point d'application; menons par ce même point, la droite $g'E'$ parallèle à gE; puis décomposons cette résultante en deux forces dirigées suivant $g'E'$ et $g'k'$, ou parallèles aux axes Ox et Oy. Il est évident que nous retrouverons la force X, et une force égale à celle qui agissait suivant gF, agissant maintenant suivant $g'k'$: cette seconde force sera égale et directement opposée à la force dirigée suivant $g'k'$; elles se détruiront donc mutuellement, et il ne restera qu'une force X dirigée suivant $g'E'$; donc celle-ci sera la résultante des trois forces données, qui étaient dirigées suivant gE, kF et $k'F'$.

On verra de même que si les forces parallèles à l'axe Oy ont une résultante unique, et que les forces parallèles à l'axe Ox se réduisent à deux, égales et contraires, ces trois forces se réduiront à une seule qui sera égale et parallèle à la première. Ainsi, toutes les fois que les deux quantités X et Y ne sont pas nulles à-la-fois, les forces données P, P', P'', etc. admettent une résultante unique : quand on a seulement $X=0$, cette résultante est parallèle à l'axe Oy, et elle est parallèle à l'axe Ox, quand on a $Y=0$.

48. On ne peut pas douter que l'équation (1) n'appartienne à la résultante toutes les fois qu'il en existe une, même lorsqu'elle est parallèle à l'un des deux axes; car, d'après ce qui précède, elle appartient certainement à la direction de cette force, lorsqu'elle fait des angles quelconques avec ces axes; et comme ce résultat a lieu, quelque petit que soit l'un de ces angles, il s'ensuit qu'il subsiste encore à la limite où cet angle devient nul, et la force parallèle à l'axe.

Si l'on fait successivement $Y=0$ et $X=0$, dans cette équation, on trouve

$$Xt=L, \quad Ys=-L;$$

équations qui appartiennent à des droites parallèles à l'axe des x et à l'axe des y, et qui font connaître leurs distances à ces axes. On tire de la première $t=\frac{L}{X}$; et cette valeur de t exprime, dans la fig. 14, la distance de la ligne $g'E'$ à l'axe Ox, ou, ce qui est la même chose, l'ordonnée Ol du point l où cette direction de la résultante coupe l'axe Oy. Il ne sera pas inutile de dire, en peu de mots, comment on peut vérifier cette valeur de Ol.

49. Le point h étant l'intersection de la droite kE avec l'axe Oy, on a d'abord $Ol=Oh-hl$; mais en faisant $Oh=y_,$, on a déjà (n° 45)

$$Xy_,=yP.\cos.\alpha+y'P'.\cos.\alpha'+y''P''.\cos.\alpha''+\text{etc.};$$

il ne reste donc plus que la valeur de hl à trouver.

Pour cela, appelons S la force dirigée suivant kF, s sa distance à l'axe Oy, S' la force égale et contraire,

qui agit suivant $k'F'$, et s' sa distance au même axe. En considérant que S est la résultaute d'une partie des forces $P.\cos.\mathcal{C}$, $P'.\cos.\mathcal{C}'$, etc., parallèles à cet axe, et que S' est la résultante de l'autre partie, on aura, d'après le n° 41,

$$Ss + S's' = xP.\cos.\mathcal{C} + x'P'.\cos.\mathcal{C}' + x''P''.\cos.\mathcal{C}'' + \text{etc.};$$

d'ailleurs on a

$$s - s' = g'k, \quad hl = g'k', \quad S' = -S,$$

et par conséquent

$$Ss + S's' = S.g'k;$$

mais à cause que la diagonale $g'g$ du rectangle $k'g'kg$ est la direction de la résultante des forces S et X, agissant au point g' suivant les côtés $g'k'$ et $g'k$, on a aussi

$$g'k : g'k' :: X : S;$$

d'où l'on tire

$$g'k' = hl = \frac{S.}{X} \quad = \frac{Ss + S's'}{X}.$$

On aura donc

$$X.hl = xP.\cos.\mathcal{C} + x'P'.\cos.\mathcal{C}' + x''P''.\cos.\mathcal{C}'' + \text{etc.};$$

retranchant cette valeur de celle de $Xy_{,}$, mettant Ol à la place de $y_{,} - hl$, et faisant attention à ce que L représente (n° 46), il vient

$$X.hl = L;$$

résultat qui coïncide avec celui du n° précédent.

50. Pour trouver maintenant les conditions d'équi-

libre des forces P, P', P'', etc., données en grandeur et en direction, et toutes comprises dans un même plan, je séparerai, comme dans le n° 42, la force P des autres. S'il n'y a aucun point fixe dans le système, il faudra, pour que ces forces se détruisent, que P', P'', etc. aient une résultante égale et contraire à P : soit R' cette résultante; a' et b', les angles qui déterminent sa direction, par rapport aux axes Ox et Oy (fig. 13); nous aurons (n° 45)

$$R'.\cos.a' = P'.\cos.\alpha' + P''.\cos.\alpha'' + \text{etc.},$$
$$R'.\cos.b' = P'.\cos.\mathcal{C}' + P''.\cos.\mathcal{C}'' + \text{etc.};$$

et pour l'équation de la droite suivant laquelle cette résultante agit (n° 46),

$$X't' - Y's' = L', \qquad (2)$$

t' et s' étant les coordonnées variables: X' et Y' désignent ici, pour abréger, les composantes $R'.\cos.a'$ et $R'.\cos.b'$, et L' représente la quantité

$$P'(y'.\cos.\alpha' - x'.\cos.\mathcal{C}') + P''(y''.\cos.\alpha'' - x''.\cos.\mathcal{C}'') + \text{etc.};$$

de manière qu'en comparant ces quantités à leurs analogues X, Y et L des n°s 45 et 46, on a

$$X' = X - P.\cos.\alpha, \quad Y' = Y - P.\cos.\mathcal{C},$$
$$L' = L - P(y.\cos.\alpha - x.\cos.\mathcal{C}).$$

Les deux forces P et R' devant être égales et directement opposées, il faut d'abord que la somme de leurs composantes, suivant chaque axe des coordonnées, soit égale à zéro; il faut donc qu'on ait

$$X' + P.\cos.\alpha = 0, \qquad Y' + P.\cos.\mathcal{C} = 0;$$

ou,

ou, ce qui est la même chose,

$$X = 0, \quad Y = 0.$$

Mais en vertu de ces deux équations, ces forces seront seulement égales, parallèles et dirigées en sens contraires; et pour qu'elles soient directement opposées, il faut encore que le point m, auquel est appliquée la force P, se trouve sur la direction de la force R'; donc ses coordonnées x et y doivent satisfaire à l'équation (2), c'est-à-dire, que cette équation doit subsister, quand on y fait $s'=x$, $t'=y$; ce qui donne $X'y-Y'x=L'$; équation qui se réduit à

$$L = 0,$$

lorsqu'on y met, pour X', Y' et L', leurs valeurs.

Il résulte de là que ces trois équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad L = 0,$$

sont nécessaires et suffisent pour l'équilibre des forces P, P', P'', puisqu'elles expriment, étant prises toutes trois ensemble, que ces forces se réduisent à deux, égales et directement opposées. En y mettant pour X, Y et L, ce que ces lettres représentent, on a

$$\left.\begin{array}{l} P.\cos.\alpha + P'.\cos.\alpha' + P''.\cos.\alpha'' + \text{etc.} = 0, \\ P.\cos.6 + P'.\cos.6' + P''.\cos.6'' + \text{etc.} = 0, \\ P(y.\cos.\alpha - x.\cos.6) + P'(y'.\cos.\alpha' - x'.\cos.6') + \text{etc.} = 0. \end{array}\right\} (3)$$

Lorsque les forces, les angles et les coordonnées qui entrent dans ces équations, et qui sont donnés

dans chaque cas particulier, les rendront identiques, on pourra assurer que l'équilibre existe; et si l'une de ces trois équations n'est pas satisfaite par ces quantités, on sera également certain que l'équilibre n'a pas lieu.

51. Si l'on a seulement $L=0$, les forces P, P', P'', etc. auront une résultante égale à $\sqrt{X^2+Y^2}$, et dont la direction passera par le point O, origine des coordonnées; car son équation se réduit alors à

$$Xt - Ys = 0,$$

qui appartient à une droite menée par cette origine. Or, quand il existe un point fixe dans le système, il suffit, pour l'équilibre, que la résultante des forces données passe par ce point, et, de plus, l'équilibre ne peut avoir lieu que de cette seule manière; donc, dans le cas d'un point fixe, si l'on prend ce point pour origine des coordonnées, les conditions d'équilibre se réduiront à ce que la quantité L soit nulle, par rapport à cette origine; de sorte qu'on n'aura alors qu'une seule équation d'équilibre, savoir, la troisième équation (3).

52. Nous ferons souvent usage, dans la suite de cet Ouvrage, d'une espèce de momens dont nous n'avons pas parlé jusqu'ici, et qu'il ne faut pas confondre avec les momens que nous avons définis dans le n° 39. En attendant que nous en donnions une théorie complète, nous exposerons ici celles de leurs propriétés, qui sont relatives à la composition des forces dirigées dans un même plan.

On appelle *moment d'une force par rapport à un point*, le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de ce point sur sa direction; le point d'où l'on abaisse la perpendiculaire se nomme le *centre des momens*.

Les momens par rapport à un point, diffèrent essentiellement des momens par rapport à un plan (n°.39). Ceux-ci dépendent du point d'application de la force, et sont indépendans de sa direction; les momens par rapport à un point dépendent, au contraire, de la direction, et sont indépendans du point d'application. Les premiers ne s'emploient que dans la théorie des forces parallèles; ils peuvent être positifs ou négatifs; leurs signes se déterminent d'après ceux de la force et de l'ordonnée du point auquel elle est appliquée, puisqu'ils sont le produit de ces deux quantités. Au contraire, dans les momens par rapport à un point, les deux facteurs, savoir, la force et la perpendiculaire abaissée sur sa direction, sont des quantités qu'on regarde toujours comme positives; par conséquent ces momens sont aussi toujours positifs.

53. D'après cette définition, il nous sera aisé de démontrer que le moment de la résultante de deux forces, pris par rapport à un point de leur plan, est égal à la somme ou à la différence des momens des composantes, pris par rapport au même point; à la différence, quand ce point est compris dans l'angle des composantes, ou dans son opposé au

sommet; à la somme, quand ce point tombe hors de ces deux angles.

En effet, soient P et P', ces deux forces; mA et mA' (fig. 15 et 16), leurs directions; Q leur résultante, agissant suivant mB; C, le centre des momens; p, p', q, les perpendiculaires Ca, Ca', Cb, abaissées de ce point sur les directions de P, P' et Q. Décomposons chacune de ces trois forces en deux autres, dirigées suivant la droite mC, et suivant la perpendiculaire KmK' élevée sur cette droite; et considérons les composantes perpendiculaires à mC.

On a évidemment

$$\cos.BmK = \sin.BmC = \frac{CB}{Cm} = \frac{q}{c},$$

en désignant par c, la longueur de la ligne Cm; donc la composante de la force Q, suivant mK, sera égale à $Q.\frac{q}{c}$. De même les composantes perpendiculaires à Cm, de P et P' sont égales à $P.\frac{p}{c}$ et $P'.\frac{p'}{c}$; elles sont dirigées en sens contraires, quand la ligne Cm traverse l'angle AmA' (fig. 15), et dans le même sens, quand cette ligne tombe hors de cet angle (fig. 16). Or, la somme de ces composantes de P et P', dans le second cas, et l'excès de la plus grande sur la plus petite, dans le premier, doit reproduire la composante de Q, puisque Q est la résultante de P et P'; on aura donc, en supposant la composante de P, plus grande que celle de P',

$$Q.\frac{q}{c} = P.\frac{p}{c} \pm P'.\frac{p'}{c};$$

le signe + se rapportant à la fig. 16, et le signe —, à la fig. 15; supprimant le dénominateur c, commun à tous les termes, il vient

$$Qq = Pp \pm P'p';$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

54. Si l'on imagine que le point C soit fixe, et que les perpendiculaires Ca, Ca', Cb, soient des droites inflexibles, les forces P, P', Q, qui peuvent être censées agir aux extrémités de ces droites, ne pourront produire qu'un mouvement de rotation autour de ce centre fixe. Or, l'inspection de la fig. 16 suffit pour montrer que quand le point C tombe hors de l'angle AmA', et de son opposé au sommet, les forces P et P' et leur résultante Q tendent à faire tourner leurs points d'application, dans le même sens autour de ce point C; au contraire, lorsque ce point tombe dans l'un de ces deux angles, la fig. 15 fait voir que les forces P et P' tendent à faire tourner les points a et a' en sens opposés; et l'on voit aussi que, dans ce cas, la résultante Q tend à faire tourner son point d'application, dans le même sens que celle des deux composantes qui a le plus grand moment. D'après cette remarque, nous pouvons énoncer, de la manière suivante, le théorème que nous venons de démontrer.

Le moment de la résultante de deux forces est égal à la somme ou à la différence des momens de ces forces, selon qu'elles tendent à faire tourner leurs points d'application dans le même sens ou dans des

sens opposés, autour du centre des momens qui est pris dans leur plan et regardé comme fixe.

Ce théorème ayant lieu pour des forces qui font entre elles un angle quelconque, doit encore subsister, quand elles deviennent parallèles; c'est en effet une conséquence facile à déduire de la composition de ce genre de forces (n° 32).

55. L'avantage de ce dernier énoncé est de pouvoir facilement s'étendre à un nombre quelconque de forces P, P', P'', etc., dirigées dans un même plan : en regardant le centre des momens comme un point fixe, autour duquel ces forces tendent à faire tourner le système de leurs points d'application, le moment de la résultante est égal à la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans le même sens qu'elle, moins la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner en sens contraire.

Sans qu'il soit besoin de construire une figure, supposons, pour fixer les idées, que les trois premières forces P, P', P'' tendent à faire tourner dans un même sens, et toutes les autres, dans le sens opposé. Reprenons la suite des constructions du n° 44. Soit Q la résultante de P et P'; Q' celle de Q et P'', ou de P, P' et P''; soient encore p, p', p'', q et q', les perpendiculaires abaissées du centre des momens sur les directions des forces P, P', P'', Q et Q'. Nous aurons, d'après ce qu'on vient de voir,

$$Qq = Pp + P'p', \quad Q'q' = Qq + P''p'';$$

d'où l'on tire

$$Q'q' = Pp + P'p' + P''p''.$$

De même, si l'on désigne par $Q_{,}$, la résultante de toutes les autres forces P''', P^{IV}, etc.; par $q_{,}$, la perpendiculaire abaissée du centre des momens sur sa direction; par p''', p^{IV}, etc., les perpendiculaires abaissées du même point sur les directions des forces P''', P^{IV}, etc. : on aura

$$Q_{,}q_{,} = P'''p''' + P^{\text{IV}}p^{\text{IV}} + \text{etc.}$$

Or, la résultante R de toutes les forces données, sera celle des deux forces Q' et $Q_{,}$; si donc on représente par r, la perpendiculaire abaissée du centre des momens sur la direction de R, et si l'on considère que ces forces Q' et $Q_{,}$ tendent à faire tourner en sens opposés, on aura

$$Rr = Q'q' - Q_{,}q_{,}, \quad \text{ou} \quad Rr = Q_{,}q_{,} - Q'q',$$

selon que $Q'q'$ sera plus grand ou plus petit que $Q_{,}q_{,}$, car le produit Rr doit toujours être positif. Dans le premier cas, la force R tendra à faire tourner le système dans le même sens que la force Q', et par conséquent dans le même sens que les trois forces P, P', P''; nous supposerons que ce soit ce premier cas qui ait lieu; de sorte qu'en substituant pour $Q'q'$ et $Q_{,}q_{,}$, leurs valeurs, nous aurons

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' - P'''p''' - P^{\text{IV}}p^{\text{IV}} - \text{etc.} \quad (4)$$

56. Cette équation renferme le théorème que l'on voulait démontrer pour un nombre quelconque de

forces. On peut encore le rendre plus général, en observant qu'il a lieu, non-seulement quand on considère la résultante définitive des forces données, mais encore lorsque l'on se contente de les réduire à un moindre nombre; de manière que si l'on désigne par S, S', S'', etc., des forces dont l'ensemble soit équivalent aux forces P, P', P'', etc., et par s, s', s'', etc., les perpendiculaires abaissées du centre des momens sur les directions de S, S', S'', etc., on trouvera, par le même raisonnement que dans le n° précédent,

$$Ss + S's' + S''s'' + \text{etc.} = Pp + P'p' + P''p'' - P'''p''' - P^{\text{iv}}p^{\text{iv}} - \text{etc.};$$

équation dans laquelle on doit prendre avec le signe $+$, les momens des forces S, S', S'', etc., qui tendent à faire tourner dans le même sens que P, P' et P'', et avec le signe $-$, les momens de celles qui tendent à faire tourner dans le sens des autres forces P''', P^{iv}, etc.

Cette équation a l'avantage de comprendre le cas particulier où les forces données P, P', P'', etc. n'ont point une résultante unique.

57. L'équation (4) fournit un énoncé fort simple de la loi de l'équilibre dans le *levier*. En effet, un levier est en général une ligne inflexible, droite ou courbe, fixée par un de ses points qu'on appelle le *point d'appui;* en supposant donc le levier que l'on considère, formé par une courbe plane, et les forces qui lui sont appliquées, toutes dirigées dans le plan de cette courbe, il faudra, pour l'équilibre, que ces

forces aient une résultante qui vienne passer par le point d'appui; si donc on prend ce point pour le centre des momens, le moment de la résultante sera égal à zéro; donc en vertu de l'équation (4), et en conservant les suppositions du n° 55, on aura

$$Pp + P'p' + P''p'' - P'''p''' - P^{\text{IV}}p^{\text{IV}} - \text{etc.} = 0; \qquad (5)$$

c'est-à-dire, que pour l'équilibre, *la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner le levier dans un sens, doit être égale à la somme des momens de celles qui tendent à le faire tourner dans le sens opposé, les momens des unes et des autres étant pris par rapport au point d'appui.*

58. Comme il existe réellement un point fixe dans le levier, il est naturel de faire entrer la considération du mouvement de rotation autour de ce point, dans l'énoncé de la condition d'équilibre, et de la faire servir à distinguer les momens qui doivent être pris avec le signe +, et ceux qui doivent avoir le signe —. Mais quand il s'agit d'un système de forces appliquées à un corps qui n'est retenu par aucun point fixe, la considération d'un mouvement de rotation hypothétique est tout-à-fait indirecte et d'ailleurs peu commode. Il vaut mieux alors, ainsi que nous l'avons pratiqué précédemment, introduire à la place des forces données, leurs composantes parallèles à des axes rectangulaires, et à la place des perpendiculaires abaissées sur leurs directions, les coordonnées de leurs points d'application; car ces composantes et ces coordonnées ont

l'avantage que leurs signes sont donnés en même tems que leurs valeurs, sans qu'on ait besoin de recourir à aucune règle particulière.

Au reste, l'équation $L = 0$ du n° 51 et l'équation (5) que nous venons de trouver, exprimant, l'une et l'autre, la condition d'équilibre des forces P, P', P'', etc., autour d'un point fixe, il est évident que ces deux équations doivent être équivalentes; et, en effet, si l'origine des coordonnées x, y, x', y', etc., qui entrent dans la fonction L, coïncide avec le centre des momens, d'où l'on abaisse les perpendiculaires p, p', p'', etc., on a identiquement

$$Pp + P'p' + P''p'' - P'''p''' - P^{\text{IV}}p^{\text{IV}} - \text{etc.} = \pm L. \quad (6)$$

On pourrait vérifier cette équation, en observant que les différens termes $y.P.\cos.\alpha$, $x.P.\cos.\beta$, $y'.P'.\cos.\alpha'$, etc. de la fonction L, sont les momens des composantes de P, P', P'', etc., pris par rapport à l'origine des coordonnées, et en montrant que ces termes sont assemblés dans L par les signes $+$ ou $-$, selon le sens dans lequel chaque composante tend à faire tourner autour de ce point; mais on obtient plus simplement l'équation (6), de la manière suivante.

Supposons que P, P', P'', etc. ont une résultante R; son équation sera, d'après le n° 46,

$$t = \frac{Y}{X} . s + \frac{L}{X};$$

et d'après les formules connues, la longueur de la

perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur cette droite, sera exprimée par

$$\pm \frac{L}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

en prenant le signe + ou le signe —, selon que L est positive ou négative, car cette longueur doit toujours être positive. Donc, r étant cette perpendiculaire, et observant que $\sqrt{X^2+Y^2}=R$, on aura

$$Rr = \pm L;$$

équation qui est la même en vertu de l'équation (4), que celle qu'on veut vérifier.

Si les forces P, P', P'', etc. n'ont pas de résultante, on ajoutera à ce système une force S de grandeur et de position arbitraires, et alors il existera une résultante. L'équation (6) aura donc lieu, en comprenant S au nombre des forces données; or, en supposant que sa direction passe par l'origine des coordonnées, les deux membres de cette équation seront les mêmes que si la force S n'existait pas; donc l'équation (6) subsiste entre les seules forces P, P', P'', etc.; par conséquent elle est vraie, soit que ces forces aient ou n'aient pas de résultante.

§. III. *Composition et Équilibre des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace.*

59. Puisque nous venons de considérer les forces parallèles et les forces dirigées dans un même plan,

et que nous avons résolu, par rapport à ces deux systèmes de forces, toutes les questions qu'on peut proposer, il est naturel de chercher à décomposer en deux pareils systèmes, les forces de direction quelconque dont nous allons maintenant nous occuper. Or, cette transformation peut s'effectuer de plusieurs manières différentes, parmi lesquelles, celle que je vais exposer m'a paru la plus simple.

Appelons m, m', m'', etc., les points matériels sur lesquels agissent les forces données, et qui sont liés entre eux d'une manière invariable. Menons par un point O choisi arbitrairement (fig. 17), trois droites rectangulaires Ox, Oy, Oz, qui seront les axes des coordonnées. Soit P la force appliquée au point m; x, y, z, les trois coordonnées de ce point; α, β, γ, les angles que fait la direction de P avec des parallèles aux axes des x, y, z: ces angles étant comptés comme on en est convenu au commencement de ce Traité (nº 5). Désignons par P', x', y', z', α', β', γ', ce que deviennent P, x, y, z, α, β, γ, par rapport au point m'; par P'', x'', y'', z'', α'', β'', γ'', ce que deviennent les mêmes quantités, par rapport au point m''; et ainsi de suite.

Décomposons chacune des forces P, P', P'', etc., sans changer son point d'application, en trois forces parallèles aux axes des coordonnées; on aura $P.\cos.\alpha$, $P'.\cos.\alpha'$, $P''.\cos.\alpha''$, etc., pour les composantes parallèles à l'axe Ox; $P.\cos.\beta$, $P'.\cos.\beta'$, $P''.\cos.\beta''$, etc., seront les composantes parallèles à l'axe Oy; et enfin les composantes parallèles à l'axe Oz seront $P.\cos.\gamma$, $P'.\cos.\gamma'$, $P''.\cos.\gamma''$, etc. On

peut substituer ces trois groupes de forces parallèles aux forces données P, P', P'', etc.; il ne s'agit donc plus que de ramener à un même plan les forces qui composent deux de ces groupes : par exemple, les forces parallèles aux axes des x et des y.

Pour y parvenir, j'observe que sans altérer le système de forces que l'on considère, il est permis d'appliquer en un même point, deux forces égales et contraires. J'applique donc au point m, deux forces parallèles à l'axe Oz, égales et opposées, et que je représente par g et $-g$. Je compose la force g, qui agit suivant ma, avec la force $P.\cos.\alpha$, qui agit suivant mh parallèle à Ox; soit mb la direction de leur résultante, et B le point où son prolongement vient rencontrer le plan des x,y. Je transporte le point d'application de cette force en ce point; puis je la décompose en deux forces parallèles aux axes des x et des z, ce qui reproduit les composantes g et $P.\cos.\alpha$, dont le point d'application seulement a été changé : la force $P.\cos.\alpha$ est maintenant dirigée dans le plan des x,y, suivant la droite BH, projection de sa première direction mh; la force g est appliquée perpendiculairement à ce plan, en un point B de cette projection dont les coordonnées sont faciles à déterminer.

En effet, si l'on suppose que A soit la projection de m sur le plan des x,y, ses coordonnées seront y et x, et l'on aura y et $x-AB$, pour celles du point B, puisque ces deux points sont sur une même parallèle à l'axe des x. Or, en considérant le parallélogramme rectangle $ABCm$, et observant que sa

diagonale Bm est la direction de la résultante des forces g et $P.\cos.\alpha$, qui agissent suivant ses côtes BC et BA, on a

$$BA : BC :: P.\cos.\alpha : g;$$

d'où l'on tire, à cause de $BC = z$,

$$BA = \frac{zP.\cos.\alpha}{g}.$$

Les coördonnées du point d'application de la force g dans le plan des x, y sont donc

$$y \text{ et } x - \frac{zP.\cos.\alpha}{g}.$$

En opérant de la même manière sur les forces $-g$ et $P.\cos.\beta$, celle-ci sera transportée dans le plan des x, y, suivant la projection de sa première direction, et les coordonnées du nouveau point d'application de la force $-g$ dans le même plan, seront

$$y + \frac{zP.\cos.\beta}{g} \text{ et } x.$$

On transportera par le même moyen, toutes les forces $P'.\cos.\alpha'$, $P''.\cos.\alpha''$, etc.; $P'.\cos.\beta'$, $P''.\cos.\beta''$, etc., dans le plan des x, y. Chacune de ces forces agira suivant la projection sur ce plan de sa direction primitive, qui pouvait être au-dessus ou au-dessous du même plan; mais on aura de plus, parallèlement à l'axe des z, autant de couples de forces g' et $-g'$, g'' et $-g''$, etc., qu'il y a de points m', m'', etc. Les coordonnées des points d'application de ces forces, dans le plan des x, y, se dé-

duiront de celles qui répondent aux forces g et $-g$, en accentuant les lettres x, y, g, P, α et ζ.

60. Nous avons donc, au lieu des forces données, un système de forces dirigées dans le plan des x, y, et un système de forces perpendiculaires à ce plan.

Pour l'équilibre des premières, il faut qu'on ait les trois équations du n° 50, car les notations sont les mêmes ici et dans ce n°; on a donc

$$P.\cos.\alpha + P'.\cos.\alpha' + P''.\cos.\alpha'' + \text{etc.} = 0, \quad (1)$$

$$P.\cos.\zeta + P'.\cos.\zeta' + P''.\cos.\zeta'' + \text{etc.} = 0, \quad (2)$$

$$P(y.\cos.\alpha - x.\cos.\zeta) + P'(y'.\cos.\alpha' - x'.\cos.\zeta') + \text{etc.} = 0. \quad (3)$$

Pour l'équilibre des forces parallèles à l'axe des z, savoir : $P.\cos.\gamma$, $P'.\cos.\gamma'$, $P''.\cos.\gamma''$, etc.; g, g', g'', etc.; $-g$, $-g'$, $-g''$, etc.; il faut d'abord (n° 42) que leur somme soit nulle, ce qui donne

$$P.\cos.\gamma + P'.\cos.\gamma' + P''.\cos.\gamma'' + \text{etc.} = 0. \quad (4)$$

Il faut ensuite que les sommes de leurs momens, pris par rapport aux plans des x, z et des y, z, qui leur sont parallèles, soient aussi nulles. Or, par rapport au premier plan, la somme des momens de $P.\cos.\gamma$, $P'.\cos.\gamma'$, $P''.\cos.\gamma''$, etc., est

$$yP.\cos.\gamma + y'P'.\cos.\gamma' + y''P''.\cos.\gamma'' + \text{etc.};$$

la somme des momens des forces g, g', g'', etc., est

$$yg + y'g' + y''g'' + \text{etc.};$$

enfin la somme des momens des forces $-g$, $-g'$, $-g''$, etc., est

$$-g.\left(y+\frac{zP.\cos.\zeta}{g}\right)-g'.\left(y'+\frac{z'P'.\cos.\zeta'}{g'}\right)-\text{etc.},$$

puisque nous avons

$$y+\frac{zP.\cos.\zeta}{g},\qquad y'+\frac{z'P'.\cos.\zeta'}{g},\ \text{etc.}$$

pour les coordonnées de leurs points d'application, perpendiculaires au plan des x, z.

On a donc, en ajoutant ces trois sommes et en réduisant,

$$P(y.\cos.\gamma-z.\cos.\zeta)+P'(y'.\cos.\gamma'-z'.\cos.\zeta')+\text{etc.}=0.\quad(5)$$

On trouvera de même, en formant la somme des momens par rapport au plan des y, z, et l'égalant à zéro

$$P(x.\cos.\gamma-z.\cos.\alpha)+P'(x'.\cos.\gamma'-z'.\cos.\alpha')+\text{etc.}=0.\quad(6)$$

61. Ces six équations suffisent pour l'équilibre des forces P, P', P'', etc.; car il est évident que si l'équilibre existe séparément dans les deux systèmes qui remplacent les forces données, il existera aussi entre ces forces. Mais pour que ces équations soient nécessaires, il faut qu'il soit démontré que ces deux systèmes de forces ne peuvent se détruire, sans qu'il y ait équilibre séparément dans chaque système; c'est en effet ce qui a lieu.

Supposons, pour le prouver, que les deux systèmes puissent être en équilibre, sans que les forces parallèles

parallèles à l'axe des z se détruisent entre elles. Il est évident qu'on ne troublera pas cet équilibre en fixant une droite choisie au hasard dans le plan des x, y; mais alors toutes les forces situées dans ce plan seront détruites, soit parce qu'elles rencontrent cette droite, soit parce qu'elles lui sont parallèles : au contraire, les forces perpendiculaires à ce plan, qui ne se détruisent pas entre elles, produiront un mouvement de rotation autour de l'axe fixe; d'où il suit que l'équilibre que l'on suppose, ne peut pas avoir lieu. Ainsi les forces perpendiculaires au plan des x, y, et par conséquent aussi les forces dirigées dans ce plan, se détruisent séparément quand l'équilibre a lieu entre toutes les forces données.

Concluons donc que les six équations du n° précédent sont nécessaires et suffisent pour l'équilibre d'un système de forces quelconques, appliquées à différens points d'un corps solide libre, c'est-à-dire, à des points matériels liés entre eux d'une manière invariable, et dont aucun n'est supposé fixe, ni retenu sur une surface donnée.

62. Occupons-nous maintenant de l'équilibre d'un corps solide qui n'est pas entièrement libre.

Supposons d'abord que le corps auquel sont appliquées les forces P, P', P'', etc., renferme un point fixe, autour duquel il soit obligé de tourner. En plaçant l'origine des coordonnées en ce point, et en substituant aux forces données les deux systèmes du n° 59, on démontrera, comme dans le cas

d'un corps libre, que l'équilibre ne peut avoir lieu entre les forces P, P', P'', etc., à moins qu'il n'existe séparément entre les forces dirigées dans le plan des x, y, et entre les forces parallèles à l'axe des z. Or, pour l'équilibre de ces dernières forces, il faut, d'après ce qu'on a démontré dans le n° 42, que les équations (5) et (6) aient lieu, et pour l'équilibre des forces dirigées dans le plan des x, y, il résulte du n° 51, que l'on doit avoir l'équation (3). Les trois équations (3), (5) et (6), du n° 60, sont donc celles de l'équilibre d'un corps solide, fixé par un de ses points.

L'équation (3) exprime (n° 51) que les forces dirigées dans le plan des x, y, ont une résultante dont la direction passe par l'origine des coordonnées; en vertu des équations (5) et (6), les forces parallèles à l'axe des z ont aussi une résultante (n° 43) passant par la même origine : si l'on suppose ces deux résultantes appliquées en ce point commun à leurs directions, et si on les compose en une seule force, celle-ci sera la résultante de toutes les forces P, P', P'', etc.; d'où il suit que quand les trois équations (3), (5), (6) ont lieu ensemble, les forces données ont une résultante unique, qui vient passer par l'origine des coordonnées; cette origine étant supposée un point fixe, la résultante est détruite par sa résistance, et elle exprime la pression que ce point supporte.

63. Considérons en second lieu l'équilibre d'un

corps solide, retenu par un axe fixe, autour duquel il est forcé de tourner, sans pouvoir glisser dans le sens de sa longueur.

Prenons cet axe pour celui des z, et substituons toujours aux forces données P, P', P'', etc., les deux systèmes de forces du n° 59. Les forces parallèles à l'axe des z, ne pourront produire aucun mouvement; il sera donc inutile d'avoir égard à ce premier système. Quant aux forces dirigées dans le plan des x, y, l'équation (3) du n° 60 suffira pour leur équilibre, puisque l'origine des coordonnées, en tant qu'elle fait partie de l'axe des z, est un point fixe. La résultante de ces forces passera par ce point, et exprimera la pression que l'axe fixe supporte perpendiculairement à sa longueur.

Ainsi, dans le cas d'un axe fixe, il n'y a qu'une seule équation d'équilibre, savoir, l'équation (3) du n° 60. Mais si le corps pouvait glisser le long de l'axe fixe, il faudrait encore, pour empêcher ce mouvement, que la somme des forces parallèles à cet axe fût égale à zéro; ce qui reproduirait l'équation (4) du même n°.

64. En faisant attention à la symétrie des équations (3), (5) et (6), on voit que l'équation (5) exprime la condition d'équilibre des forces P, P', P'', etc., autour de l'axe des x, supposé fixe, et que l'équation (6) renferme la condition d'équilibre des mêmes forces autour de l'axe des y.

Il résulte de là que les conditions d'équilibre d'un corps solide autour d'un point fixe (n° 62), con-

sistent en ce que les forces appliquées à ce corps doivent être telles qu'elles se fassent équilibre autour de trois droites rectangulaires, menées par ce point et regardées successivement comme des axes fixes.

65. Observons aussi que l'équation d'équilibre relative à chaque axe, ne contient pas les coordonnées parallèles à cet axe, non plus que les composantes parallèles au même axe. Ainsi, l'équation (3) qui renferme la condition d'équilibre autour de l'axe Oz, supposé fixe, est indépendante des coordonnées z, z', z'', etc., et ne contient pas les composantes $P.\cos.\gamma$, $P'.\cos.\gamma'$, $P''.\cos.\gamma''$, etc. : elle ne contient que les composantes parallèles aux axes Ox et Oy, ou perpendiculaires à l'axe Oz, et les coordonnées x, x', x'', etc.; y, y', y'', etc., qui appartiennent aux projections des points m, m', m'', etc., sur le plan des x, y; de sorte que si l'équilibre existe, il ne sera pas troublé en substituant aux forces données P, P', P'', etc., leurs composantes perpendiculaires à l'axe fixe, et aux points d'application m, m', m'', etc., leurs projections sur un plan perpendiculaire à cet axe.

D'après cette remarque, on pourra former de cette autre manière l'équation d'équilibre d'un système de forces données, autour d'un axe fixe :

Par le point d'application de chaque force, on imaginera un plan perpendiculaire à l'axe fixe, puis on décompera la force en deux, l'une perpendiculaire à ce plan, ou parallèle à l'axe, et l'autre dirigée dans ce plan; on fera abstraction des forces

parallèles à l'axe, et l'on aura seulement égard aux forces perpendiculaires, que je désignerai par Q, Q', Q'', etc.; ces forces seront dirigées dans des plans différens et parallèles entre eux; mais en choisissant arbitrairement un de ces plans, on supposera qu'elles agissent toutes suivant les projections de leurs directions sur ce plan : les forces Q, Q', Q'', etc., étant ainsi ramenées à un même plan, il suit de la remarque qui vient d'être faite, qu'elles devront s'y faire équilibre autour du point dans lequel ce plan rencontre l'axe fixe, et qui est par conséquent un point fixe; et réciproquement, si cet équilibre a lieu, il existera aussi entre les forces données, autour de l'axe fixe. Or, pour l'équilibre des forces Q, Q', Q'', etc., considérées dans un même plan, il faut que la somme des momens de celles qui tendent à faire tourner dans un sens autour du point fixe, soit égale à la somme des momens de celles qui tendent à faire tourner dans le sens opposé, tous ces momens étant pris par rapport au point fixe (n° 57); désignant donc par q, q', q'', etc., les perpendiculaires abaissées de ce point, sur les directions des forces Q, Q', Q'', etc., dans ce plan, et supposant pour fixer les idées, que Q, Q', Q'' tendent à faire tourner dans un sens, et Q''', Q^{IV}, etc., dans le sens opposé, on aura

$$Qq + Q'q' + Q''q'' - Q'''q''' - Q^{\text{IV}}q^{\text{IV}} - \text{etc.} = 0,$$

pour l'équation d'équilibre.

66. Cette équation est équivalente à l'équation (3)

du n° 60, puisque l'une exprime aussi bien que l'autre, la condition d'équilibre autour d'un axe fixe. Dans beaucoup de cas, il sera plus commode de faire usage de celle-ci, et c'est pour cela que nous la donnons ici. Nous croyons aussi qu'il n'est pas inutile de démontrer directement le principe sur lequel elle est fondée.

Soit donc CD (fig. 18), l'axe fixe; ACB un plan perpendiculaire à cet axe, et qui le coupe au point C; mK la direction dans l'espace d'une des forces données, appliquée au point m. Par ce point, concevons un plan perpendiculaire à CD, et décomposons la force P en deux autres, l'une dirigée dans ce plan suivant la droite mH, et l'autre parallèle à CD. Cette seconde composante ne peut produire aucun mouvement; elle est détruite par la résistance de l'axe fixe, et l'on peut en faire abstraction. Quant à la force dirigée suivant mH et parallèle au plan ACB, il s'agit de faire voir qu'on peut la remplacer par une autre, dirigée dans ce plan même.

Pour cela, désignons cette force par Q; supposons que n soit la projection de m sur le plan ACB, que nG soit celle de la ligne mH sur le même plan, et nE le prolongement de nG. Appliquons au point n deux forces S et S' agissant suivant les directions contraires nG et nE, et pour que cela ne change rien au système, supposons $S'=S$; supposons en outre que ces forces égales entre elles, soient aussi égales à Q; de sorte que la force Q se trouve remplacée par les trois forces égales S, S' et Q. Menons par l'axe CD, un plan perpendiculaire à celui des deux

droites parallèles mH et EG, et qui coupe ces droites aux points M et N, situés sur une parallèle à CD. Nous pouvons prendre M pour le point d'application de la force Q, et N pour celui des forces S et S'; or, si l'on considère les deux forces Q et S', qui agissent suivant les droites MH et NE, on voit qu'elles tendent à faire tourner le système en sens contraires, autour de l'axe CD, et que tout est parfaitement semblable autour de cet axe, par rapport à ces deux forces; il n'y a donc aucune raison pour que l'une l'emporte sur l'autre; par conséquent ces eux forces égales, parallèles et contraires, mais non directement opposées, se font équilibre au moyen de l'axe fixe. Ainsi l'on peut faire abstraction des forces Q et S', et il ne reste que la force S, égale à Q et comprise dans le plan ACB.

Quel que soit le nombre des forces données, on prouvera par ce raisonnement que chacune d'elles peut être remplacée par une force comprise dans le plan ACB : toutes ces forces dirigées dans un même plan, doivent se faire équilibre autour du point fixe C, ce qui donne l'équation du n° précédent.

67. Considérons enfin le cas où plusieurs des points du corps solide qui doit rester en équilibre, sont assujétis à demeurer dans un plan fixe, donné de position.

Conservons toujours les notations du n° 59, e prenons le plan donné, pour celui des coordonnées x et y. Substituons aux forces données, les deux mêmes systèmes de forces que dans ce n°. Il

est évident que les forces parallèles à l'axe des z, ou perpendiculaires au plan fixe, seront détruites par la résistance de ce plan; il ne restera donc que les forces dirigées dans ce plan, et pour leur équilibre, il faudra que les équations (1), (2) et (3) du n° 60 soient satisfaites : elles seront donc les trois équations d'équilibre dans le cas que nous examinons.

Mais si le corps est seulement posé sur le plan fixe, par exemple, s'il s'agit d'un polyèdre posé sur une de ses faces, il sera nécessaire que la résultante des forces perpendiculaires au plan fixe, soit tellement dirigée qu'elle appuie le corps sur ce plan. Il faudra donc, avant d'assurer que l'équilibre existe en vertu des équations (1), (2) et (3), faire attention au signe de cette résultante, et examiner s'il est le même que celui des composantes qui tendent à appuyer le corps sur le plan fixe. De plus, il faudra encore que cette force vienne couper le plan fixe dans l'intérieur de la face sur laquelle est posé le polyèdre; car on conçoit sans peine que si elle tombait hors de cette base, elle détacherait le polyèdre du plan, en le faisant tourner autour d'un des côtés de cette même base.

Cette condition d'équilibre ne peut être exprimée par une équation. Dans chaque cas particulier, on verra si elle est remplie, en déterminant, d'après la théorie des forces parallèles, les coordonnées du point où la résultante des forces perpendiculaires au plan fixe, rencontre ce plan. Or, le plan fixe étant celui des coordonnées x, y, ce système de forces comprend les composantes $P.\cos.\gamma$, $P'.\cos.\gamma'$,

$P''.\cos.\gamma''$, etc., des forces données, et les couples de forces ajoutées, g et $-g$, g' et $-g'$, g'' et $-g''$, etc. (n° 59); la résultante de toutes ces forces parallèles est égale à leur somme, et en la désignant par Z, on a

$$Z = P.\cos.\gamma + P'.\cos.\gamma' + P''.\cos.\gamma'' + \text{etc.}$$

De plus, si l'on suppose qu'elle rencontre le plan des x, y, au point K (fig. 17) que l'on prendra pour son point d'application, et si l'on appelle $y_{,}$ et $x_{,}$, les coordonnées de ce point parallèles aux axes Oy et Ox, on aura $Zy_{,}$, pour son moment par rapport au plan des x, z, et $Zx_{,}$, pour son moment par rapport au plan des y, z; or, le moment de la résultante par rapport à chaque plan, est égal à la somme des momens des composantes par rapport au même plan (n° 39); d'ailleurs les sommes des momens des forces $P.\cos.\gamma$, $P'.\cos.\gamma'$, etc.; g, $-g$, g', $-g'$, etc., par rapport aux plans des x, z et des y, z, ont été trouvées dans le n° 60; égalant donc ces sommes aux quantités $Zy_{,}$ et $Zx_{,}$, nous aurons pour déterminer les valeurs de $x_{,}$ et $y_{,}$, les équations

$$Zy_{,} = P(y.\cos.\gamma - z.\cos.6) + P'(y'.\cos.\gamma' - z'.\cos.6') + \text{etc.},$$
$$Zx_{,} = P(x.\cos.\gamma - z.\cos.\alpha) + P'(x'.\cos.\gamma' - z'.\cos.\alpha') + \text{etc.}$$

Ainsi, dans chaque cas particulier, on devra s'assurer si le point K, qui répond à ces coordonnées, est compris dans l'intérieur de la base sur laquelle le corps est posé.

Si le corps ne touche le plan fixe que par deux

points, ou bien si tous les points d'appui sont rangés sur une même droite, il faudra que le point K appartienne aussi à cette ligne, sans quoi la résultante Z ne serait pas détruite, et le corps tournerait autour de la droite de contact. En la prenant donc pour l'axe Ox, on devra avoir $y_{,}=0$, ce qui change la première de nos deux équations, dans l'équation (5) du n° 60; donc dans ce cas, on aura une quatrième équation d'équilibre, savoir, cette équation (5), à joindre aux trois équations (1), (2) et (3).

Enfin, il peut arriver que le corps n'ait qu'un seul point d'appui sur le plan fixe, et alors l'équilibre exige que la résultante Z vienne passer par ce point; si donc nous prenons ce point de contact pour l'origine des coordonnées, il faudra qu'on ait $x_{,}=0$, $y_{,}=0$; par conséquent les deux équations précédentes deviendront les équations (5) et (6) du n° 60. Donc, dans ce dernier cas, on a cinq équations d'équilibre, savoir, les équations (1), (2), (3), (5) et (6).

Dans tous ces cas, la résultante Z des forces perpendiculaires au plan fixe, exprimera la pression que ce plan supporte.

68. Lorsque les forces P, P', P'', etc., ne se font pas équilibre, on peut demander de les réduire au moindre nombre possible. Pour y parvenir, nous substituerons encore aux forces données, les deux systèmes de forces du n° 59. Si chacun de ces systèmes se réduit à une force unique, et que les deux résultantes se trouvent dans un même plan, on

pourra les composer en une seule qui sera la résultante de toutes les forces données; dans le cas contraire, il faudra conserver ces deux résultantes pour remplacer l'ensemble de ces forces.

On a coutume de regarder comme évident que deux forces dirigées dans des plans différens, ne sauraient être remplacées par une force unique; mais pour ne rien supposer de ce qui peut être démontré, j'observe que si ces deux forces avaient une résultante, il s'ensuivrait qu'en rendant fixe un point pris au hasard sur sa direction, les deux forces données seraient en équilibre autour de ce point. Or, cet équilibre est impossible; car on peut mener par ce point une droite qui coupe la direction de l'une des forces, sans être comprise dans le plan de l'autre; de sorte qu'en rendant fixe cette ligne, la force qu'elle rencontre serait détruite, et rien n'empêcherait l'autre de produire un mouvement de rotation autour de l'axe fixe; donc les deux forces n'étant point en équilibre avec l'axe fixe, cet état n'a pas lieu, à plus forte raison, autour du point fixe, et par conséquent il est impossible qu'une seule force leur soit équivalente.

69. En supposant donc que ni les forces dirigées dans le plan des x, y, ni les forces parallèles à l'axe des z, ne tombent dans le cas d'exception du n° 54, on peut être certain que les résultantes de ces deux systèmes doivent se couper, pour que les forces P, P', P'', etc. aient une résultante unique; d'où

l'on voit que cette circonstance importante dépendra d'une équation de condition facile à trouver.

En effet, soit, pour abréger,

$$P.\cos.\alpha + P'.\cos.\alpha' + P''.\cos.\alpha'' + \text{etc.} = X,$$
$$P.\cos.6 + P'.\cos.6' + P''.\cos.6'' + \text{etc.} = Y,$$
$$P.(y.\cos.\alpha - x.\cos.6) + P'(y'.\cos.\alpha' - x'.\cos.6') + \text{etc.} = L;$$

l'équation de la résultante des forces dirigées dans le plan des x, y,, sera (n° 46)

$$Xy_{,} - Yx_{,} = L,$$

$y_{,}$ et $x_{,}$ étant les coordonnées d'un point quelconque de cette droite.

Soit encore

$$P.\cos.\gamma + P'.\cos.\gamma' + P''.\cos.\gamma'' + \text{etc.} = Z,$$
$$P(x.\cos.\gamma - z.\cos.\alpha) + P'(x'.\cos.\gamma' - z'.\cos.\alpha') + \text{etc.} = M,$$
$$P(z.\cos.6 - y.\cos.\gamma) + P'(z'.\cos.6 - y'.\cos.\gamma') + \text{etc.} = N;$$

Z sera la résultante des forces $P.\cos.\gamma$, $P'.\cos.\gamma'$, etc.; g, g', etc.; $-g$, $-g'$, etc., parallèles à l'axe des z; et $x_{,}$, $y_{,}$ étant, comme dans le n° 67, les coordonnées du point où sa direction coupe le plan des x, y, les deux équations de ce n° deviendront

$$Zx_{,} = M, \quad Zy_{,} = -N.$$

Tirant de là les valeurs de $x_{,}$ et $y_{,}$, et les substituant dans l'équation $Xy_{,} - Yx_{,} = L$, on obtiendra évidemment l'équation de condition demandée, savoir :

$$LZ + MY + NX = 0. \qquad (a).$$

70. Quand on a à la fois $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, cette équation est satisfaite, et cependant les forces P, P', P'', etc. n'ont point une seule résultante : au contraire, elles se réduisent à deux forces parallèles, égales et contraires, mais non directement opposées; car, à cause de $X=0$, $Y=0$, les forces comprises dans le plan des x, y se réduisent à deux forces parallèles de cette espèce ; et à cause de $Z=0$, la même chose a lieu pour les forces parallèles à l'axe des z; or, on réduira sans peine ces deux couples de forces à un seul couple de la même espèce.

Il n'en est pas de même lorsque deux seulement des quantités X, Y, Z sont nulles : l'équation (a) convient à ce cas particulier, et les forces P, P', P'', etc. ont ou n'ont point une résultante unique, selon que cette équation est ou n'est pas satisfaite.

Supposons en effet qu'on ait $X=0$, $Y=0$, et que Z ne soit pas zéro. L'équation (a) se réduit à $L=0$; si elle est satisfaite, les forces dirigées dans le plan des x, y se font équilibre (n° 50), en vertu des trois équations $X=0$, $Y=0$, $L=0$; donc il ne reste que les forces parallèles à l'axe des z, dont la résultante Z est celle des forces données P, P', P'', etc. Si l'équation (a) n'est pas satisfaite, de sorte qu'on ait $X=0$, $Y=0$, sans avoir en même tems $L=0$, les forces dirigées dans le plan des x, y se réduiront à deux forces parallèles, non réductibles à une seule (n° 47); or, en les

combinant avec la force Z, on trouvera aisément et sans que nous ayons besoin de l'indiquer, le moyen de réduire ces trois forces à deux, situées dans des plans différens, et par conséquent irréductibles à une seule.

La symétrie des valeurs de X, Y, Z, nous dispense d'examiner les cas où l'on aurait $X=o$ et $Z=o$, ou bien Y et $Z=o$; car il est évident qu'ils doivent conduire au même résultat que $X=o$ et $Y=o$, en substituant le plan des x, z et l'axe des y, ou bien le plan des y, z et l'axe des x, au plan des x, y et à l'axe des z.

Il peut encore arriver qu'une des trois quantités X, Y, Z soit seule égale à zéro, que l'on ait, par exemple, $X=o$ ou $Y=o$. Alors les forces dirigées dans le plan des x, y, ont une résultante (n° 47), ainsi que les forces parallèles à l'axe des z, de sorte que l'analyse du n° précédent et l'équation (a) qui s'en déduit, s'appliquent à ce cas particulier aussi bien que si aucune des trois quantités X, Y, Z n'était nulle. Si c'était Z qui fût nulle, cette analyse ne s'appliquerait plus; mais à cause de la symétrie que nous venons de remarquer, l'équation (a), qui convient au cas de $X=o$ et à celui de $Y=o$, convient aussi au cas de $Z=o$.

Concluons donc de toute cette discussion, que l'équation (a) est satisfaite toutes les fois que les forces P, P', P'', etc. admettent une résultante unique, et réciproquement, que quand cette équation se vérifie, la résultante existe, excepté dans le cas

particulier où l'on a à la fois $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, cas dans lequel ces forces se réduisent à deux, parallèles et irréductibles.

71. On peut encore obtenir l'équation (a) d'une autre manière qu'il est bon de connaître. Si les forces P, P', P'', etc., ont une résultante unique, rien n'empêche de transporter l'origine des coordonnées en un point de sa direction; or, d'après ce qu'on a vu dans le n° 62, les valeurs relatives à ce point, des quantités désignées par L, M, N, sont égales à zéro, et réciproquement, quand ces trois quantités sont nulles, les forces données ont une résultante unique, passant par l'origine des coordonnées. Appelons donc $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, les coordonnées d'un point quelconque de la résultante; transportons en ce point l'origine des coordonnées de tous les points d'application des forces, et soient $L_{,}$, $M_{,}$, $N_{,}$, ce que deviennent L, M, N, relativement à cette nouvelle origine. Pour effectuer ce changement d'origine, il faut remplacer les coordonnées x, y, z; x', y', z'; etc., qui entrent dans L, M, N, par $x-x_{,}$, $y-y_{,}$, $z-z_{,}$; $x'-x_{,}$, $y'-y_{,}$, $z'-z_{,}$; etc.; ce qui donne

$$L_{,}=L+Yx_{,}-Xy_{,},$$
$$M_{,}=M+Xz_{,}-Zx_{,},$$
$$N_{,}=N+Zy_{,}-Yz_{,}.$$

En égalant à zéro ces valeurs de $L_{,}$, $M_{,}$, $N_{,}$, nous obtiendrons trois équations qui appartiendront exclusivement aux points de la résultante, et qui seront celles de ses projections sur les trois plans des coor-

données, savoir :

$$Xy_{,} - Yx_{,} = L, \quad Zx_{,} - Xz_{,} = M, \quad Yz_{,} - Zy_{,} = N. \qquad (b)$$

Mais pour que cette droite soit possible, il faut que ces trois équations s'accordent entre elles ; or, en multipliant la première par Z, la seconde par Y, la troisième par X, et les ajoûtant ensuite, les variables $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ disparaissent, et il vient cette équation de condition

$$LZ + MY + NX = 0,$$

comme précédemment.

Nous voyons aussi que cette équation ne comprend pas le cas particulier de $X=0$, $Y=0$, $Z=0$; car alors il est insignifiant de multiplier les équations (b) par ces trois facteurs nuls, et l'équation identique qui s'en déduit n'a plus aucun rapport avec elles. Les forces P, P', etc. ont dans ce cas deux résultantes parallèles, non réductibles à une seule, ou bien elles se font équilibre, si, outre les équations supposées $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, on a encore $L=0$, $M=0$, $N=0$ (n° 60).

Mais quand les trois quantités X, Y, Z ne sont pas nulles ensemble, l'équation (a) est réellement déduite des équations (b), et peut tenir lieu de l'une d'entre elles ; de sorte que cette équation de condition convient à tous les cas, excepté celui de $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, ce qui s'accorde avec le résultat du n° précédent.

72. Les équations (b) font seulement connaître la position

position de la résultante dans l'espace; mais il reste encore à déterminer sa grandeur et même le sens dans lequel elle agit; question qui ne présente aucune difficulté.

Pour la résoudre, il faut composer en une seule force, la résultante des forces dirigées dans le plan des x, y, et celle des forces perpendiculaires à ce plan; or, la seconde est égale à Z, les composantes de la première, parallèles aux axes des x et des y, sont X et Y; donc X, Y, Z, sont les composantes parallèles aux trois axes, de la résultante définitive; en l'appelant donc R, et désignant par a, b, c, les angles qui déterminent sa direction par rapport aux trois axes, nous aurons (n° 20)

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

et de plus

$$R.\cos.a = X, \quad R.\cos.b = Y, \quad R.\cos.c = Z;$$

équations qui déterminent complètement la grandeur et la direction de la résultante.

On peut remarquer, en faisant attention aux valeurs de X, Y, Z (n° 69), que cette grandeur et cette direction sont les mêmes que si toutes les forces P, P', P'', etc. étaient appliquées en un même point (n° 21) parallèlement à leurs directions respectives; de manière que la véritable résultante ne diffère de celle qui aurait lieu dans ce cas, que par sa position absolue dans l'espace.

73. Si les forces P, P', P'', etc. n'ont point une résultante unique, on peut au moins, dans tous les cas, les réduire à deux forces qui ne seront

plus déterminées de grandeur et de direction, comme le serait une seule résultante. Cette proposition se vérifie sans peine, en examinant tous les cas que peuvent présenter le système des forces dirigées dans le plan des x, y et celui des forces parallèles à l'axe des z, lesquels systèmes ont toujours, ou chacun une seule résultante, ou chacun deux résultantes parallèles et non réductibles; mais on peut la démontrer directement de la manière suivante.

Sans rien changer au système des forces P, P', P'', etc., on peut y ajouter deux forces égales et directement opposées. Pour fixer les idées, supposons que ces forces sont appliquées à l'origine des coordonnées. Soit S leur intensité commune; a', b', c', les angles que l'une d'elles fait avec les trois axes, et par conséquent, $200^\circ - a'$, $200^\circ - b'$, $200^\circ - c'$, les angles qui se rapportent à l'autre (n° 7). Il est permis de supposer que le système des forces données, augmenté de la première force S, a une résultante unique; car l'existence de cette résultante ne dépend que d'une seule équation de condition, à laquelle on peut satisfaire, d'une infinité de manières différentes, au moyen des quantités S, a, b, c. Désignant donc cette résultante par R', les forces données se trouveront réduites à deux, savoir, R' et la seconde force S. D'où il suit qu'un nombre quelconque de forces, dirigées comme on voudra dans l'espace, peuvent toujours être remplacées par deux forces qui leur sont équivalentes, et qui se réduiront elles-mêmes à une seule, quand les forces données admettront une résultante unique.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES MOMENS.

74. Les quantités que nous avons désignées dans le chapitre précédent, par L, M, N (n° 69), dépendent de la position des plans des coordonnées par rapport aux forces P, P', P'', etc. ; souvent on a besoin de changer la direction de ces plans, dans la vue de simplifier, et même de rendre possible, la solution d'un problème ; or, il existe entre les valeurs de L, M, N, relatives à un même système de forces et à des plans différens, des relations d'après lesquelles on déduit ces valeurs les unes des autres, et qui renferment des théorèmes remarquables. C'est la démonstration de ces théorèmes que je me propose de donner dans ce chapitre.

75. Nous avons appelé moment d'une force par rapport à un point (n° 52), le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de ce point sur sa direction, et centre des momens, le point d'où l'on abaisse la perpendiculaire. Si donc l'intensité de la force est représentée par une ligne AB (fig. 19), prise sur sa direction, et que le centre des momens soit le point C, le moment sera égal au double de l'aire du triangle ABC, qui a pour base cette ligne et son sommet au centre C. La projection de ce

triangle sur un plan mené arbitrairement par son sommet, est un autre triangle $A'B'C$, qui a même sommet que le premier, et pour base, la projection $A'B'$ de la ligne AB sur ce plan; donc la projection du moment de la force AB est égale au moment d'une autre force représentée en grandeur et en direction par $A'B'$; mais si l'on transporte la force AB au point B', parallèlement à sa direction, de sorte qu'elle soit représentée maintenant par la droite aB', égale et parallèle à AB; et si on la décompose ensuite en deux, l'une dirigée dans le plan de projection et l'autre perpendiculaire à ce plan, il est évident que la première composante sera la force $A'B'$; par conséquent nous pouvons dire que la projection du moment d'une force quelconque est égale au moment de cette même force, que l'on aurait décomposée suivant le plan de projection, de la manière que nous indiquons.

76. Cette remarque fort simple établit une relation importante entre les momens d'une force décomposée suivant différens plans qui passent tous par le centre des momens. Il en résulte que ces momens sont les projections du double d'un même triangle, faites sur ces différens plans. Ainsi, par exemple, les trois quantités

$$P(y.\cos.\alpha - x.\cos.\beta),\ P(x.\cos.\gamma - z.\cos.\alpha),\ P(z.\cos.\beta - y.\cos.\gamma),$$

qui entrent dans les expressions de L, M, N, sont les projections sur les trois plans des coordonnées, du double du triangle qui a son sommet à l'origine,

et pour base, la force P. En effet, si l'on suppose que P soit la force AB de la construction précédente, et que l'on prenne le plan $CA'B'$ pour celui des x, y, la force $A'B'$ sera la résultante des deux forces $P.\cos.\alpha$ et $P.\cos.6$, appliquées au point B', parallèlement aux axes des x et des y; or, d'après le n° 53, le moment de cette résultante par rapport au point C, est égal, abstraction faite du signe à $y.P.\cos.\alpha - x.P.\cos.6$; donc cette quantité est le double du triangle $CA'B'$, ou le double de la projection du triangle CAB sur le plan des x, y. Par la même raison, les deux autres quantités sont aussi le double des projections de ce triangle sur les plans des x, z et des y, z.

On conçoit d'après cela que les propriétés des momens doivent être liées à celles des projections des surfaces planes. C'est pourquoi nous allons exposer celles-ci en leur donnant toute la généralité qu'on peut desirer.

77. Pour déterminer les inclinaisons respectives des plans que nous aurons à considérer, rapportons-les à trois plans rectangulaires, que nous nommerons les plans primitifs de projection, ou simplement les *plans primitifs*; appelons de même *axes primitifs*, les intersections de ces plans, et soient mA, mB, mC (fig. 1re), ces trois axes rectangulaires.

Si l'on considère un plan mené par le point m, intersection de ces trois axes, il est évident que sa position sera déterminée en même tems que celle de la perpendiculaire à ce plan, élevée par ce point;

or, la position de cette ligne dépend des trois angles aigus ou obtus, qu'elle fait avec les axes; lors donc que nous regarderons un plan comme donné de position, ce sera toujours au moyen de ces trois angles, comptés comme il a été dit dans le n° 5.

Ainsi mD étant la perpendiculaire au plan que l'on considère, sa position sera déterminée par rapport aux plans primitifs, au moyen des trois angles CmD, BmD et AmD. Ces angles peuvent être obtus ou aigus; mais il est bon d'observer que s'ils se changent tous trois à la fois, dans leurs supplémens $200° - CmD$, $200° - BmD$, $200° - AmD$, le plan donné restera le même; car alors la droite mD se changera dans son prolongement mD', ce qui ne fait pas varier le plan perpendiculaire à cette droite, mené par le point m. Un même plan répond donc aux angles CmD, BmD, AmD, et à leurs supplémens; et quand ces angles seront déterminés par les valeurs de leurs cosinus, un même plan répondra à ces valeurs, et aux mêmes valeurs prises toutes trois avec des signes contraires.

Observons encore que ces angles qui servent à déterminer la position du plan donné, ne sont autre chose que ses inclinaisons sur les plans primitifs: l'angle CmD est son inclinaison sur le plan AmB; l'angle BmD, sur le plan CmA; et l'angle AmD, sur le plan BmC; ce qui résulte de ce que l'angle compris entre deux plans quelconques, est égal à l'angle compris entre les perpendiculaires à ces plans, élevées par un même point de leur intersection.

78. Cela posé, voici différentes formules connues dont nous ferons usage dans cette théorie.

Considérons deux droites mD et mE (fig. 20), menées par l'intersection m, des axes primitifs mA, mB, mC; soient q, q', q''; r, r', r'', les angles relatifs à ces droites, de sorte qu'on ait

$$AmD = q, \quad BmD = q', \quad CmD = q'';$$
$$AmE = r, \quad BmE = r', \quad CmE = r'';$$

soit en outre s, l'angle DmE formé par ces deux droites; on aura

$$\cos. s = \cos. r . \cos. q + \cos. r' . \cos. q' + \cos. r'' . \cos. q''. \quad (1)$$

En effet, prenons arbitrairement sur ces droites, des parties mD et mE, que nous représenterons par h et g; menons la droite DE, et faisons $DE = k$: nous aurons dans le triangle mDE,

$$k^2 = h^2 + g^2 - 2hg . \cos. s.$$

Mais les coordonnées du point D, parallèles aux axes mA, mB, mC, sont égales, comme il est aisé de le voir, à $mD . \cos. AmD$, $mD . \cos. BmD$, $mD . \cos. CmD$, ou, ce qui est la même chose, à $h . \cos. q$, $h . \cos. q'$, $h . \cos. q''$; celles du point E, parallèles aux mêmes axes, sont égales à $g . \cos. r$, $g . \cos. r'$, $g . \cos. r''$; donc on a, pour la valeur de k^2, ou du carré de DE, en fonction de ces coordonnées,

$$k^2 = (h . \cos. q - g . \cos. r)^2 + (h . \cos. q' - g . \cos. r')^2 + (h . \cos. q'' - g . \cos. r'')^2.$$

Ces deux valeurs de k^2 doivent être identiques; développant donc la seconde, et égalant ensuite les

coefficiens de h^2, g^2 et gh, il vient

$$\cos^2.q+\cos^2.q'+\cos^2.q''=1,$$
$$\cos^2.r+\cos^2.r'+\cos^2.r''=1,$$
$$\cos.q.\cos.r+\cos.q'.\cos.r'+\cos.q''.\cos.r''=\cos.x;$$

équations dont les deux premières étaient déjà démontrées (n° 8), et dont la troisième est la formule (1).

Lorsque les droites mD et mE sont perpendiculaires, on a $s=100°$, $\cos.s=0$, et cette formule devient

$$\cos.q.\cos.r+\cos.q'.\cos.r'+\cos.q''.\cos.r''=0. \qquad (2)$$

Si les deux droites mE et mD étaient situées dans l'un des trois plans primitifs, par exemple, dans le plan AmB, on aurait $q''=100°$ et $r''=100°$: l'équation se réduirait alors à

$$\cos.q.\cos.r+\cos.q'.\cos.r'=0.$$

79. D'après cela, menons par le point m(fig. 21), trois nouveaux plans de projection, rectangulaires comme les premiers, et dont les intersections soient mA', mB', mC'; et rapportons les premiers à ceux-ci, au moyen des angles

$$AmA'=\alpha,\quad AmB'=\alpha',\quad AmC'=\alpha'';$$
$$BmA'=\mathit{6},\quad BmB'=\mathit{6}',\quad BmC'=\mathit{6}'';$$
$$CmA'=\gamma,\quad CmB'=\gamma',\quad CmC'=\gamma'';$$

nous aurons d'abord (n° 8)

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2.\alpha+\cos^2.\alpha'+\cos^2.\alpha''=1,\\ \cos^2.\mathit{6}+\cos^2.\mathit{6}'+\cos^2.\mathit{6}''=1,\\ \cos^2.\gamma+\cos^2.\gamma'+\cos^2.\gamma''=1;\end{array}\right\} \qquad (3)$$

ensuite, en considérant les droites perpendiculaires *Am* et *Bm*, *Am* et *Cm*, *Bm* et *Cm*, l'équation (2) donnera

$$\left.\begin{array}{l}\cos.\alpha.\cos.6+\cos.\alpha'.\cos.6'+\cos.\alpha''.\cos.6''=0,\\ \cos.\alpha.\cos.\gamma+\cos.\alpha'.\cos.\gamma'+\cos.\alpha''.\cos.\gamma''=0,\\ \cos.6.\cos.\gamma+\cos.6'.\cos.\gamma'+\cos.6''.\cos.\gamma''=0.\end{array}\right\} (4)$$

80. Maintenant, soit a une portion de surface plane, terminée par une courbe quelconque, et située dans un plan passant par le point m; mD la perpendiculaire à ce plan; q, q', q'', les trois angles AmD, BmD, CmD; p, p', p'', les projections de a sur les trois plans primitifs, savoir, p sur le plan mBC, p' sur le plan mAC, p'' sur le plan mAB. On sait que la projection de l'aire d'une courbe plane sur un autre plan, est égale à cette aire multipliée par le cosinus de l'angle compris entre les deux plans, ou entre les perpendiculaires aux deux plans; on aura donc

$$p=a.\cos.q,\quad p'=a.\cos.q',\quad p''=a.\cos.q''.$$

Ces valeurs de p, p', p'' seront positives ou négatives, selon les signes des cosinus de q, q', q''; mais on fera abstraction du signe, quand on aura seulement pour but de connaître l'étendue de l'aire de ces projections.

81. Considérons encore la projection de a sur un nouveau plan, qui sera, si l'on veut, le plan $mB'C'$; soit b cette projection, et c l'angle $A'mD$, compris entre les perpendiculaires mA' et mD, à ce nouveau plan et au plan de a; on aura $b=a.\cos.c$, et d'après

la formule (1), appliquée à ces deux droites,

$$\cos.c = \cos.q.\cos.\alpha + \cos.q'.\cos.6 + \cos.q''.\cos.\gamma; \quad (5)$$

multipliant les deux membres de cette équation par a, puis substituant p, p', p'' à la place de $a.\cos.q$, $a.\cos.q'$, $a.\cos.q''$, il vient

$$b = p.\cos.\alpha + p'.\cos.6 + p''.\cos.\gamma. \quad (6)$$

Cette équation fera connaître la projection de a sur un plan quelconque, lorsque les projections de cette aire seront données sur trois plans rectangulaires, par rapport auxquels la position du nouveau plan sera aussi donnée.

Comme la formule (5) n'a lieu qu'en ayant égard aux signes des cosinus qu'elle renferme, il s'ensuit qu'il faut de même avoir égard aux signes de p, p', p'', dans l'équation (6). Ainsi, dans cette équation, p, p', p'' sont des quantités positives ou négatives, dont les signes dépendent de la position de la perpendiculaire mD, par rapport aux axes primitifs : par exemple, la quantité p est positive quand l'angle DmA est aigu; elle est négative dans le cas contraire.

82. Considérons de même un nombre quelconque d'aires, représentées par a, a', a'', etc., et situées dans des plans différens; projetons chacune de ces aires sur les trois plans primitifs; puis ajoutons ensemble les projections faites sur un même plan, en ayant égard à leurs signes. Soient A, A', A'', les trois sommes que l'on obtiendra de cette manière,

et qui se rapportent respectivement aux plans mBC, mAC, mAB; soit aussi B la somme des projections de a, a', a'', etc., sur le plan $mB'C'$: en formant une équation semblable à l'équation (6), pour chacune de ces aires, et en ajoutant ensuite toutes ces équations, on aura évidemment

$$B = A.\cos.\alpha + A'.\cos.\beta + A''.\cos.\gamma.$$

Représentons encore par B' la somme des projections de a, a', a'', etc., sur le plan $mA'C'$; il est évident que la valeur de B' se déduira de celle de B, en substituant l'axe mB', perpendiculaire au plan $mA'C'$, à l'axe mC', perpendiculaire au plan $mB'C'$, c'est-à-dire, en substituant α', β', γ', aux angles α, β, γ; de sorte que nous aurons

$$B' = A.\cos.\alpha' + A'.\cos.\beta' + A''.\cos.\gamma';$$

et de même, si B'' exprime la somme des projections de a, a', a'', etc., sur le troisième plan $mA'B'$, on aura sa valeur en mettant dans celle de B, α'', β'', γ'', à la place de α, β, γ; ce qui donne

$$B'' = A.\cos.\alpha'' + A'.\cos.\beta'' + A''.\cos.\gamma''.$$

En ajoutant les carrés de ces valeurs de B, B', B'', on trouve, en vertu des équations (3) et (4),

$$B^2 + B'^2 + B''^2 = A^2 + A'^2 + A''^2. \qquad (7)$$

On en déduit aussi sans difficulté

$$\left.\begin{aligned} A &= B.\cos.\alpha + B'.\cos.\alpha' + B''.\cos.\alpha'', \\ A' &= B.\cos.\beta + B'.\cos.\beta' + B''.\cos.\beta'', \\ A'' &= B.\cos.\gamma + B'.\cos.\gamma' + B''.\cos.\gamma''. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Ces équations sont inverses de celles qui donnent B, B', B'', au moyen de A, A', A''; elles feront connaître A, A', A'', quand B, B', B'' seront données.

83. L'équation (7) nous fait voir que cette somme $B^2+B'^2+B''^2$ est indépendante de la direction des trois plans de projection, c'est-à-dire, qu'elle ne varie pas en passant d'un système de plans rectangulaires à un autre. Dans le cas particulier où toutes les aires a, a', a'', etc., sont dans un même plan, cette invariabilité est évidente; car il est aisé de voir que cette somme n'est alors autre chose que le carré de $a+a'+a''+$etc. En effet, si l'on prend le plan de ces aires pour l'un des plans primitifs, deux des trois quantités A, A', A'', savoir, celles qui se rapportent aux deux autres plans, seront nulles : la troisième sera égale à la somme $a+a'+a''+$etc.; de sorte que l'on aura

$$B^2+B'^2+B''^2=(a+a'+a''+\text{etc.})^2$$

On peut considérer alors $a+a'+a''+$ etc., comme formant une seule aire plane; et l'on voit que le carré de cette aire est égal à la somme des carrés de ses projections sur trois plans rectangulaires, comme il résulte d'un théorème connu.

Voyons actuellement ce que représente la somme $B^2+B'^2+B''^2$, dans le cas général où les aires a, a', a'', etc. sont situées dans des plans différens.

On déduit de l'équation (7)

$$B = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2 - B'^2 - B''^2};$$

la somme B, qui varie en passant d'un plan de projection à un autre, est donc la plus grande possible quand on a $B'=0$, $B''=0$; et alors elle est égale à $\sqrt{A^2+A'^2+A''^2}$. Ainsi cette quantité constante représente la plus grande somme des projections sur un même plan, des aires que l'on considère dans l'espace.

84. Le plan $mB'C'$ qui répond à cette plus grande projection, jouit de propriétés importantes en mécanique, que nous ferons connaître dans la suite de ce Traité. Sa position est facile à déterminer, d'après les équations $B'=0$, $B''=0$, qui le caractérisent.

En effet, les équations (8) se réduisent alors à

$$A = B.\cos.\alpha, \quad A' = B.\cos.6, \quad A'' = B.\cos.\gamma;$$

d'où l'on tire

$$\cos.\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}},$$

$$\cos.6 = \frac{A'}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}},$$

$$\cos.\gamma = \frac{A''}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}}.$$

Lors donc que l'on connaîtra les sommes des projections A, A', A'', sur trois plans rectangulaires mBC, mAC, mAB, choisis arbitrairement, on

pourra immédiatement déterminer la direction du plan $mB'C'$ de la plus grande projection, au moyen des trois angles α, β, γ, qui se rapportent à une ligne mA' perpendiculaire à ce plan (n° 79). Quant à la position absolue de ce plan dans l'espace, il est clair qu'elle reste indéterminée ; car les projections de chacune des aires a, a', a'', etc., et par conséquent, la somme de ces projections, sont les mêmes sur tous les plans parallèles entre eux.

85. La somme des projections des aires a, a', a'', etc., est la même sur tous les plans, également inclinés à celui de la plus grande projection.

Pour le démontrer, prenons le plan perpendiculaire à la droite mD; désignons par C la somme des projections faites sur ce plan, et soit toujours, comme dans les n^{os} précédens, q, q', q'' les angles AmD, BmD, CmD, et c l'angle $A'mD$, qui mesure l'inclinaison de ce plan sur celui de la plus grande projection. On aura, d'après ce qu'on vient de trouver (n° 82),

$$C = A.\cos.q + A'.\cos.q' + A''.\cos.q'';$$

substituant $B.\cos.\alpha$, $B.\cos.\beta$, $B.\cos.\gamma$, à la place de A, A', A'', il vient

$$C = B(\cos.\alpha.\cos.q + \cos.\beta.\cos.q' + \cos.\gamma.\cos.q'');$$

donc, d'après la formule (5), on aura $C = B.\cos.c$, ou bien en mettant pour B sa valeur *maximum*,

$$C = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}.\cos.c.$$

D'où il suit que la valeur de C est la même pour tous les plans qui font le même angle c avec le plan $mC'B'$ de la plus grande projection.

Cette valeur diminue à mesure que l'angle c approche de 100°; enfin elle est nulle pour tous les plans perpendiculaires à celui de la plus grande projection.

86. Appliquons maintenant à la théorie des momens, ces propriétés des projections des surfaces planes.

Si nous supposons que les aires a, a', a'', etc. sont doubles des triangles qui ont pour bases les forces P, P', P'', etc., représentées par des lignes prises sur leurs directions, et pour sommet commun, l'origine des coordonnées de leurs points d'application, ces aires seront les momens de ces mêmes forces pris par rapport à cette origine (n° 75). La partie de la quantité L, relative à chacune de ces forces, sera la projection sur le plan des x, y, du double du triangle qui correspond à cette force (n° 76); par conséquent L représentera la somme des projections, tant positives que négatives, des aires a, a', a'', etc. sur le plan des x, y; et de même M et N représenteront les sommes des projections de ces aires sur les plans des x, z et des y, z. Ces trois quantités L, M, N, et en général les quantités analogues, relatives au même système de forces et à d'autres plans, jouiront donc des mêmes propriétés que les sommes des projections de a, a', a'', etc. sur ces plans.

Dans l'énoncé de ces propriétés, nous suppose-

rons l'origine des coordonnées invariable, et nous y placerons toujours le centre des momens. Nous appellerons une quantité telle que L, la somme des momens des forces P, P', P'', etc., décomposées suivant le plan des x, y; mais on ne devra pas oublier qu'avant sa décomposition, chaque force doit être transportée, parallèlement à elle-même, en un point de sa projection sur ce plan, ainsi qu'on l'a vu dans le n° 76, relativement à la force P. Nous désignerons semblablement les sommes M, N, et toute autre quantité analogue à L.

Cela posé:

1° Lorsque les sommes des momens des forces P, P', P'', etc., décomposées suivant les trois plans des coordonnées, sont connues, la somme des momens des mêmes forces, décomposées suivant un plan quelconque, mené par le centre des momens, est donnée par cette formule

$$D = L.\cos.\epsilon + M.\cos.\epsilon' + N.\cos.\epsilon'';$$

dans laquelle D représente la somme cherchée; ϵ, ϵ', ϵ'', les angles que fait la perpendiculaire au plan quelconque, avec les axes des z, des y et des x.

2°. Parmi toutes les positions que peut prendre le plan mené par le centre des momens, il en existe une pour laquelle la somme des momens des forces données, décomposées suivant ce plan, est la plus grande possible, et égale à $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$. Par rapport à tout plan perpendiculaire à celui-là, la somme des momens est égale à zéro; et générale-
ment

ment elle est égale à $\sqrt{L^2+M^2+N^2}.\cos.\delta$, relativement à un plan dont δ est l'inclinaison sur celui de la plus grande somme.

3°. Enfin, en désignant par α, β, γ, les angles que la perpendiculaire à ce dernier plan fait avec les axes des z, des y et des x, on a (n° 84), pour déterminer sa position,

$$\cos.\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},$$
$$\cos.\beta = \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},$$
$$\cos.\gamma = \frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}};$$

d'où l'on peut conclure que si l'on prend sur la perpendiculaire au plan relatif à chaque somme de momens, une ligne proportionnelle à cette somme, la ligne qui représente la plus grande somme sera en grandeur et en direction, la diagonale du parallélépipède construit sur les trois sommes L, M, N.

La composition des momens suit donc les mêmes lois que celle des forces, la plus grande somme des momens et la perpendiculaire à son plan remplaçant la résultante et sa direction.

87. Avant de quitter ce sujet, nous rapprocherons, en peu de mots, la théorie des momens de ce que nous avons trouvé dans le chapitre précédent, sur les conditions d'équilibre et sur les résultantes des forces P, P', P'', etc. Pour abréger, nous appel-

lerons *plan principal*, le plan qui répond à la plus grande somme des momens des forces décomposées, et *moment principal*, cette plus grande somme.

88. Les conditions d'équilibre d'un corps solide peuvent à présent s'énoncer d'une manière fort simple.

Si le corps est libre, il est nécessaire et il suffit que le moment principal et la résultante des forces données soient nuls. Ces deux conditions donnent en effet les six équations d'équilibre démontrées dans le n° 60; car la résultante R (n° 72) ne peut être nulle sans que ses trois composantes rectangulaires X, Y, Z, ne soient aussi nulles; et de même le moment principal $\sqrt{L^2+M^2+N^2}$ ne peut être égal à zéro, sans qu'on n'ait séparément $L=0$, $M=0$, $N=0$. Le centre des momens peut être placé en un point quelconque; mais d'après la transformation qu'on a faite dans le n° 71, il est évident que si ces trois dernières équations ont lieu pour un point déterminé, elles subsistent également pour tout autre point, lorsque l'on a en même tems $X=0$, $Y=0$ et $Z=0$.

Quand le corps est retenu par un point fixe, il suffit que le moment principal soit nul, en plaçant le centre des momens en ce point.

Enfin quand le corps est retenu par un axe fixe, il suffit que le plan principal renferme l'axe, le centre des momens étant placé en un point quelconque du même axe. En effet, supposons que l'axe fixe soit celui des z; si le plan principal le renferme, l'angle α

du n° 86 sera droit, et l'on aura par conséquent $L=0$; ce qui est l'équation d'équilibre trouvée dans le n° 65.

89. Lorsque les forces P, P', P'', etc., ont une résultante unique, il est évident que le plan principal doit être celui qui renferme cette résultante et le centre des momens. La perpendiculaire à ce plan et la parallèle à la résultante, menées par le centre des momens, doivent donc être perpendiculaires entre elles; ainsi il faut qu'on ait (n° 78)

$$\cos.\alpha.\cos.c+\cos.\text{6}.\cos.b+\cos.\gamma.\cos.a=0;$$

α, 6, γ étant les angles que fait la première droite avec les axes, des z, des y et des x; et c, b, a, les angles que fait la seconde droite avec les mêmes axes. Or, on a donné les valeurs de $\cos.a$, $\cos.b$, $\cos.c$, dans le n° 72, et celles de $\cos.\alpha$, $\cos.\text{6}$, $\cos.\gamma$, dans le n° 86; substituant donc ces valeurs, l'équation précédente se change en celle-ci

$$LZ+MY+NX=0,$$

qui a effectivement lieu quand les forces données ont une résultante (n° 69).

90. Jusqu'ici nous avons supposé que le centre des momens restait toujours à l'origine des coordonnées; mais si on le transporte en un autre point, le moment principal variera, et l'on peut demander en quel point ou en quelle suite de points, ce moment est le plus petit. Quand les forces P, P', P'', etc., ont une résultante unique, il est évident

8..

que ces points sont ceux qui se trouvent sur la direction de la résultante; car pour tous les points de cette droite, les quantités L, M, N, sont nulles (n° 71), et par conséquent le moment principal est égal à zéro. Pour obtenir l'équation du lieu de tous ces points dans le cas général, désignons par $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, les coordonnées d'un point quelconque où l'on transporte le centre des momens, et par $L_{,}$, $M_{,}$, $N_{,}$, ce que deviennent L, M, N, relativement à ce point; nous aurons (n° 71)

$$L_{,} = L + Yx_{,} - Xy_{,},$$
$$M_{,} = M + Xz_{,} - Zx_{,},$$
$$N_{,} = N + Zy_{,} - Yz_{,};$$

ce qui montre d'abord que si les forces P, P', P'', etc., se réduisent à deux, parallèles et irréductibles, auquel cas on a $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, les valeurs de L, M, N, ne varieront pas avec le centre des momens. Ainsi, dans ce cas, la valeur du moment principal ne change pas, et le plan principal reste parallèle à lui-même, en quelque point que soit placé le centre des momens. On conçoit en effet que ce plan doit être constamment parallèle à celui des deux forces auxquelles les forces données se réduisent, et que le moment principal est toujours égal à la perpendiculaire comprise entre les directions de ces forces, multipliée par leur valeur commune.

Dans tout autre cas, le moment principal sera une fonction des coordonnées $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, du centre

des momens. Son carré sera égal à $L_{,}^{2}+M_{,}^{2}+N_{,}^{2}$, ou à

$$(L+Yx_{,}-Xy_{,})^{2}+(M+Xz_{,}-Zx_{,})^{2}+(N+Zy_{,}-Yz_{,})^{2}.$$

En égalant à zéro ses trois différences partielles relatives à $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, afin de déterminer son *minimum*, et observant que $R^{2}=X^{2}+Y^{2}+Z^{2}$, on obtient trois équations qu'il est facile d'écrire sous cette forme :

$$R^{2}x_{,}=X(Xx_{,}+Yy_{,}+Zz_{,})+ZM-YL,$$
$$R^{2}y_{,}=Y(Xx_{,}+Yy_{,}+Zz_{,})+XL-ZN,$$
$$R^{2}z_{,}=Z(Xx_{,}+Yy_{,}+Zz_{,})+YN-XM.$$

Or, si l'on ajoute ces trois équations, après avoir multiplié la première par X, la seconde par Y, la troisième par Z, on trouve une équation identique ; il s'ensuit donc que l'une d'elles est la suite des deux autres ; et comme les coordonnées $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, ne s'y montrent qu'au premier degré, elles appartiennent à une ligne droite, qui est le lieu demandé des centres des momens, par rapport auxquels le moment principal est un *minimum*. Il n'est pas nécessaire ici d'examiner lequel a lieu, du *maximum* ou du *minimum ;* car il est évident que la valeur du moment principal croît indéfiniment avec les coordonnées $x_{,}, y_{,}, z_{,}$; de sorte que cette fonction n'est pas susceptible de limite dans le sens de son accroissement.

91. En éliminant la quantité $Xx_{,}+Yy_{,}+Zz_{,}$

entre les équations précédentes, prises successivement deux à deux, on trouve

$$Yx_{,}-Xy_{,}+L=\frac{Z.(NX+MY+LZ)}{R^{2}},$$

$$Zy_{,}-Yz_{,}+N=\frac{X.(NX+MY+LZ)}{R^{2}},$$

$$Xz_{,}-Zx_{,}+M=\frac{Y.(NX+MY+LZ)}{R^{2}}.$$

Ces équations appartiennent aux projections sur les trois plans des coordonnées, du lieu des centres des momens principaux *minima*. On vérifie qu'elles coïncident avec celles de la résultante (nº 71), dans le cas où les forces P, P', P'', etc., en ont une; car on a alors

$$NX+MY+LZ=0.$$

On peut aussi remarquer qu'en vertu de ces équations, la valeur du moment principal *minimum*, donnée dans le nº précédent, devient

$$\frac{(NX+MY+LZ)^{2}}{R^{2}};$$

ensorte que la condition d'une résultante unique consiste en ce que ce moment doit être égal à zéro.

CHAPITRE IV.

APPLICATION DES PRINCIPES PRÉCÉDENS AUX CORPS PESANS.

§. Ier. *Définition de la pesanteur et conditions d'équilibre de ces Corps.*

92. On nomme indifféremment *pesanteur* ou *gravité*, la force qui précipite les corps vers la surface de la terre, aussitôt qu'ils cessent d'être soutenus. Son action s'exerce sur toutes les parties de la matière, dans des directions perpendiculaires à cette surface, ou suivant des lignes *verticales*. Les directions prolongées de la pesanteur en différens lieux, iraient donc concourir au centre de la terre, à cause de sa forme, à très-peu-près sphérique; mais en ayant égard à la grandeur du rayon terrestre (*), relativement aux dimensions des corps que l'on a ordinairement à considérer, on peut supposer, sans erreur sensible, la pesanteur parallèle à elle-même dans toute l'étendue d'un même corps.

Des expériences que nous ferons connaître quand nous traiterons du mouvement des corps pesans, ont prouvé que l'intensité de la pesanteur varie à la

(*) Sa longueur moyenne est de 6366198 mètres.

surface de la terre : elle est la plus petite à l'équateur; lorsqu'on s'approche du pôle, elle croît proportionnellement au carré du sinus de la latitude. On sait encore qu'à la même latitude, elle diminue à mesure qu'on s'élève sur la verticale, et qu'elle suit la raison inverse du carré de la distance du corps pesant au centre de la terre. Ainsi, à parler rigoureusement, la gravité n'est pas la même pour toutes les parties d'un même corps, à raison de la différence de leurs distances à l'équateur et au centre de la terre. Néanmoins on conçoit que dans une aussi petite étendue, la variation de l'intensité de cette force peut être négligée, comme celle de sa direction.

Un corps pesant sera donc pour nous un assemblage de points matériels auxquels sont appliquées des forces égales, parallèles et dirigées dans le même sens : la direction de chacune de ces forces est indiquée par celle du fil à-plomb qui serait suspendu à son point d'application.

93. Toutes ces forces ont une résultante égale à leur somme et parallèle à leur direction commune. Cette résultante forme ce qu'on appelle le *poids* du corps.

Il est évident, d'après cette définition, que le poids d'un corps *homogène,* ou entièrement de la même matière, est indépendant de sa forme et proportionnel à son volume. Deux corps homogènes et équivalens en volume sont donc égaux en poids; de sorte qu'étant placés dans les deux plateaux d'une

balance, ils doivent s'y faire équilibre. C'est ce que l'expérience confirme journellement; mais elle nous montre en même tems que les corps *hétérogènes* n'ont pas le même poids sous des volumes égaux; et pour cette raison, nous nous représentons ces corps comme renfermant sous le même volume, des nombres différens de parties matérielles douées d'une pesanteur égale.

On a coutume d'exprimer cette différence de composition, en disant que les corps sont plus ou moins *denses*, selon qu'ils contiennent, à volume égal, un nombre plus ou moins grand de parties matérielles également pesantes. La *densité* relative de deux corps n'est donc autre chose que le rapport de leurs poids sous le même volume; par conséquent, si l'on veut former une table des densités des diverses espèces de corps, solides ou fluides, on prendra pour unité la densité d'une substance convenue, et l'on déterminera par l'expérience le rapport du poids d'un volume quelconque de chaque corps, à celui d'un volume égal de cette substance. L'eau distillée est le corps que l'on prend ainsi pour terme de comparaison; mais comme sa densité varie avec sa température, on prend pour unité la densité de ce fluide au point de sa plus grande condensation, qui répond à environ 4° du thermomètre centigrade. Ainsi quand on dit, par exemple, que la densité de l'or est 19, cela signifie que le poids d'un volume quelconque de ce métal est égal à 19 fois celui d'un égal volume d'eau distillée et prise au *maximum* de densité.

C'est aussi le poids d'un centimètre cube de cette eau qui forme notre unité de poids, ou le *gramme*; de manière que le poids d'un corps, évalué en grammes, est égal au produit de sa densité par son volume évalué en centimètres cubes.

94. Lorsque l'on transporte un corps d'un lieu dans un autre, son poids varie proportionnellement à la pesanteur; mais il est impossible de s'en apercevoir au moyen d'une balance, puisque les poids de tous les corps croissent ou décroissent dans le même rapport. Il faudrait, pour manifester directement cette variation, comparer le poids d'un corps à une force qui ne dépendît point du changement de pesanteur; or, le moyen le plus simple, serait d'employer à cet usage la force élastique de l'air, ainsi que nous l'expliquerons dans la suite. Observons seulement ici que si nous désignons par P le poids d'un corps, par V son volume, sa densité par D, et par g la gravité au lieu où l'on considère le poids P: nous aurons

$$P = VDg.$$

Dans cette équation, où les quantités P, V, D, g, ne sont pas de même nature, il convient de remarquer que ces lettres représentent des nombres abstraits, savoir, les rapports des quantités correspondantes, à des unités arbitraires de l'espèce de chacune d'elles. Ainsi V exprime le nombre d'unités cubiques que renferme le volume du corps que l'on considère, D le rapport numérique de sa densité à

celle de l'eau que l'on prend pour unité, g le rapport de la pesanteur relative à l'endroit de l'espace qu'occupe ce corps, à la pesanteur que l'on choisit pour unité de force et qui se rapporte à un lieu déterminé : l'unité de poids est alors celui d'une unité cubique d'eau, transportée en ce dernier lieu, et P désigne le nombre de ces unités que contient le poids du corps.

95. Puisque tous les points d'un corps pesant sont sollicités par des forces parallèles, il s'ensuit que si on lui fait prendre successivement diverses positions par rapport à la direction de ces forces, leur résultante passera constamment par un certain point de ce corps. Ce point que nous avons appelé, en général, *centre des forces parallèles* (n° 37), prend ici le nom particulier de *centre de gravité*. Sa propriété caractéristique, dans les corps solides pesans, consiste en ce que, s'il est supposé fixe, le corps auquel il appartient reste en équilibre dans toutes les positions possibles autour de ce point, parce que, dans toutes ces positions, la résultante des forces appliquées aux points du corps, vient passer par le point fixe.

On conçoit aussi que quand un corps solide pesant est retenu par un autre point fixe, il est nécessaire et il suffit pour l'équilibre, que la droite qui joint ce point et le centre de gravité, soit verticale ; ce centre pouvant d'ailleurs se trouver au-dessus ou au-dessous du point fixe. En effet, le poids du corps étant une force verticale, appliquée

à son centre de gravité, sa direction coïncidera, dans notre supposition, avec la droite qui joint ce centre et le point fixe; par conséquent cette force sera détruite par la résistance de ce dernier point, comme si elle y était immédiatement appliquée.

96. Par la même raison, si l'on considère un corps solide pesant, suspendu par un fil CA, à un point fixe C (fig. 22), il est évident que dans le cas de l'équilibre, ce fil sera vertical, et que le prolongement AB de sa direction ira passer par le centre de gravité du corps; ce qui fournit un moyen connu pour déterminer, par l'expérience, le centre de gravité d'un corps solide, hétérogène et de figure quelconque : on le suspend successivement à un point fixe, dans deux positions différentes, c'est-à-dire, qu'après avoir attaché le fil de suspension en un point quelconque A, on l'attache en un autre point A'; dans ces deux positions, on attend que l'équilibre se soit établi; puis on trace dans l'intérieur du corps, le prolongement du fil de suspension, savoir, AB dans la première position et $A'B'$ dans la seconde: ces deux droites se coupent en un point G qui est le centre de gravité cherché.

97. En général, les conditions d'équilibre que nous avons trouvées précédemment, et les équations qui les renferment, s'appliqueront sans peine à un corps solide pesant, sollicité d'ailleurs par d'autres forces quelconques : il suffira de comprendre au nombre des forces données, une force verticale,

égale au poids du corps et appliquée à son centre de gravité. Ainsi, par exemple, les équations (1), (2), (3) du n° 60, et la condition relative à la direction de la résultante (n° 67), renfermeront toutes les conditions d'équilibre d'un corps pesant posé sur un plan fixe; mais au lieu de les déduire de ces équations générales, je crois qu'il sera plus utile de considérer directement ce cas particulier.

J'observe d'abord que si le corps est soumis à la seule action de la pesanteur, et que le plan fixe soit horizontal, l'équilibre aura lieu, pourvu seulement que la verticale menée par le centre de gravité, vienne couper le plan fixe dans l'intérieur de la base du corps; condition nécessaire pour que son poids ou la force qui le sollicite, soit détruite par la résistance du plan fixe, et sans laquelle le corps serait renversé sur ce plan. Mais si le plan fixe est un *plan incliné*, le corps glissera le long de ce plan en vertu de sa pesanteur, et il faudra qu'une ou plusieurs autres forces lui soient appliquées pour le maintenir en équilibre. Afin de simplifier la question, je supposerai qu'il n'y ait qu'une seule force, ou que, s'il y en a plusieurs, elles ont une résultante unique que j'appelerai Q. Soit aussi P, le poids du corps. Il sera nécessaire, pour l'équilibre, que ces deux forces aient une résultante, et qu'elle soit perpendiculaire au plan incliné; il faudra donc que leurs directions soient comprises dans un même plan; par conséquent la direction de la force Q devra se trouver dans un plan vertical mené par le centre de gravité du corps, lequel plan contient déjà la direction de

la force P. Quand cette condition ne sera pas remplie, l'équilibre sera impossible, quel que soit le rapport des deux forces P et Q; supposons-la donc satisfaite, et cherchons le rapport de ces forces, nécessaire à l'équilibre.

98. Considérons le plan vertical qui renferme à la fois, le centre de gravité du corps et la direction donnée de la force Q. Soit *lmnpq* (fig. 23), la section du corps par ce plan; AB la section du plan incliné, BC et AC une verticale et une horizontale, menées par des points B et A, pris arbitrairement sur la droite AB: on appelle ordinairement ces droites AB, BC et AC, la *longueur*, la *hauteur* et la *base* du plan incliné. Soit aussi G le centre de gravité du corps, GF la verticale qui représente la direction du poids P, KE la direction de la force Q, K le point d'intersection des lignes KE et GF, et KD une perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan incliné.

Puisque la résultante des forces Q et P doit être dirigée suivant KD, on aura (n° 18)

$$P : Q :: \sin. EKD : \sin. FKD.$$

Mais l'angle FKD étant égal à l'angle BAC, à cause de leurs côtés perpendiculaires, on a

$$\sin. FKD = \sin. BAC = \frac{BC}{AC};$$

ce qui change la proportion en celle-ci:

$$P : Q :: AC.\sin. EKD : BC.$$

Tel est le rapport qui doit exister entre les deux forces P et Q, pour que la seconde puisse empêcher le corps de glisser sur le plan incliné. Il dépend, comme on voit, de l'angle EKD que la force Q fait avec la perpendiculaire à ce plan ; et cette force doit être d'autant plus grande, que cet angle s'écarte plus de l'angle droit. Si la force Q est parallèle au plan incliné, auquel cas l'angle EKD est droit, la proportion devient

$$P : Q :: AC : BC;$$

donc dans le cas le plus avantageux, la force Q est au poids P qu'il s'agit de soutenir, comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur. Dans ce cas, la force Q est égale et directement contraire au poids P décomposé parallèlement au plan incliné.

Dans tous les cas, la perpendiculaire KD doit rencontrer le plan fixe en dedans de la base du corps, et la résultante des forces P et Q exprime la pression supportée par ce plan.

§. II. *Détermination des Centres de gravité.*

99. Occupons-nous maintenant des moyens de déterminer, par le calcul, la position du centre de gravité, et proposons-nous ce problème général : *un corps étant partagé en un nombre quelconque de parties dont les centres de gravité sont connus, trouver celui du corps entier?*

Pour le résoudre, je considère le poids de chaque partie comme une force verticale, appliquée à son

centre de gravité ; ensuite je cherche, au moyen des formules du n° 40, les coordonnées du centre de ces forces parallèles, qui sera le centre de gravité demandé.

Soient donc p, p', p'', etc., les poids des diverses parties du corps; x, y, z, les coordonnées du centre de gravité du poids p; x', y', z', les coordonnées de celui du poids p'; etc. ; soient aussi $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, les coordonnées du centre de gravité du corps entier, et P son poids, ou la somme des poids p, p', p'', etc.; en faisant attention que P est la résultante des forces p, p', p'', etc., nous aurons, d'après le n° cité,

$$Px_{,} = px + p'x' + p''x'' + \text{etc.},$$
$$Py_{,} = py + p'y' + p''y'' + \text{etc.},$$
$$Pz_{,} = pz + p'z' + p''z'' + \text{etc.},$$

pour déterminer les valeurs de $x_{,}, y_{,}$ et $z_{,}$.

Ces coordonnées seront indépendantes de l'intensité de la pesanteur; car cette quantité entrant comme facteur commun dans les valeurs des poids P, p, p', p'', etc. (n° 94), on en peut faire abstraction. Il s'ensuit donc que le centre de gravité ne change pas de position dans les corps, lorsqu'on les transporte d'un lieu dans un autre, quoique la pesanteur soit différente en ces deux lieux.

Lorsque les centres de gravité de tous les poids partiels p, p', p'', etc., se trouveront dans un même plan, celui du corps entier se trouvera aussi dans ce plan ; et quand tous ces points seront rangés sur une même droite, on pourra être certain que le centre

centre de gravité qu'on cherche est un des points de cette droite (n° 41).

100. Si le corps que l'on considère est homogène, de manière que la densité de toutes ses parties soit la même, les poids P, p, p', p'', etc., seront simplement proportionnels aux volumes, et en désignant ceux-ci par V, v, v', v'', etc., on aura

$$Vx_{,} = vx + v'x' + v''x'' + \text{etc.},$$
$$Vy_{,} = vy + v'y' + v''y'' + \text{etc.},$$
$$Vz_{,} = vz + v'z' + v''z'' + \text{etc.}$$

Ces formules ont lieu, quel que soit le nombre de parties dans lequel on a divisé le volume V; elles subsisteront donc encore, si l'on suppose que ce nombre devient infini, et qu'en même tems les portions v, v', v'', etc. de ce volume, deviennent infiniment petites; par conséquent on peut toujours dire que *le volume entier d'un corps, multiplié par la distance de son centre de gravité à un plan quelconque, est égal à la somme de tous les élémens infiniment petits de ce même volume, multipliés respectivement par leurs distances à ce plan.*

A proprement parler, cette somme d'un nombre infini de quantités infiniment petites, n'est qu'une *limite* dont on peut approcher d'aussi près qu'on veut, en augmentant le nombre de ces quantités. Ainsi, par exemple, que l'on partage le volume donné en un très-grand nombre de portions très-petites, v, v', v'', etc., qu'on multiplie ensuite chaque portion par la distance d'un de ses points au plan

des x, y, et que ce point soit pris au hasard dans l'étendue de cette portion de volume : la somme de tous les produits ne sera pas la valeur exacte de $Vz_{,}$, car il faudrait, pour cela, que le point pris dans chaque volume partiel, fût le centre de gravité de cette partie du corps; mais comme ces deux points différeront de moins en moins, à mesure que la portion de volume à laquelle ils appartiennent, deviendra plus petite, on conçoit que la somme des produits approchera aussi de plus en plus de la valeur de $Vz_{,}$; de telle sorte que cette valeur peut être regardée comme sa limite dans le sens du décroissement des volumes v, v', v'', etc. Il ne s'agira donc que de trouver, dans chaque cas particulier, l'expression de cette limite, qui s'obtiendra par les règles du calcul intégral, ainsi qu'on va le voir dans les nos suivans.

101. Quoique les lignes et les surfaces, telles qu'on les considère en géométrie, soient denuées de pesanteur, il arrive néanmoins qu'on demande souvent leurs centres de gravité; mais pour donner un sens à cette question, il faut entendre que l'on regarde alors tous leurs points comme chargés de poids égaux, ou tirés par des forces égales et parallèles. D'après cela, cherchons le centre de gravité d'une ligne à double courbure, donnée par ses deux équations.

Partageons la longueur de la courbe en une infinité d'élémens infiniment petits ; la longueur de l'élément qui répond aux coordonnées quelconques

x, y, z, sera, comme on sait, $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$; le produit de cet élément par sa distance au plan des x, y, sera donc $z.\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$; et d'après les principes du calcul intégral, on aura la somme de tous les produits semblables, pour une portion déterminée de la courbe, en prenant l'intégrale $\int z.\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, depuis le premier point jusqu'au dernier. Or, en vertu du théorème du n° précédent, qui convient aux lignes et aux surfaces, comme aux volumes, cette somme de produits doit être égale à $lz_{,}$, l étant la longueur de la courbe, et $z_{,}$ la distance de son centre de gravité au plan des x, y; donc on aura

$$lz_{,}=\int z.\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

On aura de même, par rapport au plan des x, z et des y, z,

$$ly_{,}=\int y.\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$
$$lx_{,}=\int x.\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2};$$

$x_{,}$ et $y_{,}$ représentant les coordonnées du centre de gravité, parallèles aux axes des x et des y.

Ces trois équations donneront les valeurs de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, quand celle de l sera connue; or, celle-ci dépend d'une intégrale prise entre les mêmes limites que les précédentes, savoir:

$$l=\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

On voit donc que pour déterminer le centre de

gravité d'une courbe quelconque, il faudra prendre séparément quatre *intégrales définies* dont les *limites* communes correspondent aux points extrêmes de la courbe. Pour cela, il sera d'abord indispensable de ramener chacune des intégrales précédentes à la forme $\int Tdt$, T étant une fonction d'une seule variable t; ce qu'on fera en substituant dans ces intégrales, à la place de deux des trois coordonnées x, y, z, et de leurs différentielles, leurs valeurs en fonction de la troisième, déduites des équations de la courbe proposée, ou plus généralement, en exprimant ces trois coordonnées et leurs différentielles, en fonction d'une nouvelle variable t. Cela fait, si la formule Tdt est intégrable sous forme finie, par les règles connues, on prendra son intégrale complète; d'où l'on déduira ensuite l'intégrale définie dont on a besoin, en y mettant successivement à la place de t, les valeurs de cette variable relatives aux deux limites, et en retranchant l'un de l'autre, les résultats de ces deux substitutions. Quand la formule Tdt ne sera pas intégrable sous forme finie, il faudra recourir aux diverses méthodes que le calcul intégral enseigne, et qui donnent par approximation les valeurs des intégrales définies (*).

102. Eclaircissons ce procédé par un exemple, le plus simple de tous ceux qu'on peut choisir. Supposons que la courbe proposée est une ligne droite

(*) Voyez pour de plus grands détails, le *Traité du Calcul intégral* de M. Lacroix.

dont les équations sont

$$y = \alpha x + \alpha', \qquad z = \mathcal{C}x + \mathcal{C}'.$$

Nous aurons

$$dy = \alpha dx, \quad dz = \mathcal{C}dx, \quad \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{1+\alpha^2+\mathcal{C}^2}.dx;$$

et par conséquent

$$\int \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{1+\alpha^2+\mathcal{C}^2}.\,x + C,$$

$$\int x.\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{1+\alpha^2+\mathcal{C}^2}.\frac{x^2}{2} + C',$$

$$\int y.\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{1+\alpha^2+\mathcal{C}^2}.\left(\frac{\alpha x^2}{2} + \alpha' x\right) + C'',$$

$$\int z.\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{1+\alpha^2+\mathcal{C}^2}.\left(\frac{\mathcal{C}x^2}{2} + \mathcal{C}' x\right) + C''',$$

C, C', C'', C''', étant des constantes arbitraires. Désignons par a et b les valeurs de x, relatives aux points extrêmes de la portion de cette droite dont on demande le centre de gravité; les valeurs des intégrales définies, prises entre ces limites, seront

$$\int \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{1+\alpha^2+\mathcal{C}^2}.(a - b),$$

$$\int x.\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{1+\alpha^2+\mathcal{C}^2}.\frac{(a^2-b^2)}{2},$$

$$\int y.\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{1+\alpha^2+\mathcal{C}^2}.\left[\frac{(a^2-b^2)}{2}.\alpha + (a-b).\alpha'\right];$$

$$\int z.\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{1+\alpha^2+\mathcal{C}^2}.\left[\frac{(a^2-b^2)}{2}.\mathcal{C} + (a-b).\mathcal{C}'\right].$$

On aura donc, en substituant ces valeurs dans les formules du n° précédent, et en faisant les réduc-

tions qui se présentent,

$$x_{,}=\frac{a+b}{2},\ \ y_{,}=(a+b).\frac{\alpha}{2}+a',\ \ z_{,}=(a+b).\frac{6}{2}+6'.$$

Ces coordonnées appartiennent au milieu de la droite donnée ; et en effet ce point est évidemment son centre de gravité.

Connaissant le centre de gravité d'une ligne droite, on en conclura sans peine celui du contour d'un polygone quelconque, au moyen des formules du n° 100, dans lesquelles on substituera les côtés de ce polygone aux quantités v, v', v'', etc., et le contour entier à la somme V de ces mêmes quantités.

103. La recherche du centre de gravité devient plus simple, quand il s'agit d'une courbe plane, et qu'on prend son plan pour l'un de ceux des coordonnées, par exemple, pour le plan des x, y ; on a alors $z=0$, $dz=0$, $z_{,}=0$, et par conséquent

$$lx_{,}=\int x.\sqrt{dx^2+dy^2},\ ly_{,}=\int y.\sqrt{dx^2+dy^2},\ l=\int\sqrt{dx^2+dy^2};$$

de sorte que la question ne dépend plus que de trois intégrales définies. Si l'on suppose en outre que la courbe soit coupée en deux parties semblables par une droite, de manière que cette droite renferme le centre de gravité, et qu'on la prenne pour axe des x, on aura $y_{,}=0$: il ne s'agira plus que de déterminer la valeur de $x_{,}$, au moyen des équations

$$lx_{,}=\int x.\sqrt{dx^2+dy^2},\quad l=\int\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

104. Prenons pour exemple de ce cas particulier,

l'arc de cercle BAD (fig. 24), divisé en deux parties égales au point A, par le rayon CA. Plaçons l'origine des coordonnées au centre C, et l'axe des x sur ce rayon; soit de plus

$$CA=r, \quad Cp=x, \quad mp=y, \quad Am=s;$$

nous aurons

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=ds, \quad x=r.\cos.\frac{s}{r};$$

d'où l'on tire

$$\int x.\sqrt{dx^2+dy^2}=r^2.\sin.\frac{s}{r}+C;$$

C étant la constante arbitraire.

Aux limites de cette intégrale, qui répondent aux points B et D, on a $s=\frac{1}{2}.l$ et $s=-\frac{1}{2}.l$, l étant l'arc entier BAD; passant donc à l'intégrale définie, on aura

$$lx_{\prime}=\int x.\sqrt{dx^2+dy^2}=2r^2.\sin.\frac{l}{2r};$$

mais c représentant la corde BD, on a

$$c=2r.\sin.\frac{l}{2r};$$

d'où il suit

$$lx_{\prime}=rc:$$

résultat qui montre que *la distance* $x_{\prime}$ *du centre de gravité d'un arc de cercle, au centre de ce cercle, est quatrième proportionnelle au rayon, à la corde et à l'arc.*

105. Appliquons encore les formules du n° 103, à

l'arc de cycloïde. Soit BCA (fig. 25) cette courbe, C son sommet, BA sa base, égale à la circonférence du cercle générateur, CD le diamètre de ce cercle. Prenons le point C pour origine des coordonnées, la tangente en ce point pour axe des x, et le diamètre CD pour axe des y; de sorte que nous ayons pour un point quelconque m, $Cp=x$ et $mp=y$. Faisons aussi $CD=a$; l'équation différentielle de la courbe qu'on trouve dans tous les traités de calcul différentiel, aura cette forme :

$$dx=\frac{(a-y).dy}{\sqrt{ay-y^2}};$$

d'où l'on tire

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\frac{a}{y}}.dy;$$

et par conséquent

$$l=\int\sqrt{dx^2+dy^2}=2\sqrt{ay};$$

l étant l'arc Cm, compté du point C où l'on a $y=0$. Donc aussi

$$ly_{,}=\int y.\sqrt{dx^2+dy^2}=\int\sqrt{ay}.dy=\tfrac{2}{3}.\sqrt{a}.y^{\frac{3}{2}},$$

l'intégrale commençant au point C. En divisant par la valeur de l, il vient

$$y_{,}=\tfrac{1}{3}.y;$$

ce qui fait connaître la distance du centre de gravité de l'arc Cm, à l'axe Cx.

Pour déterminer son autre coordonnée $x_{,}$, on a

$$\int x.\sqrt{dx^2+dy^2}=\int x.\sqrt{\frac{a}{y}}.dy;$$

ou bien, en intégrant par parties,

$$\int x.\sqrt{dx^2+dy^2}=2x.\sqrt{ay}-2\int\sqrt{ay}.dx;$$

substituant la valeur de dx, et réduisant, il vient

$$\int\sqrt{ay}.dx=\int\sqrt{a}.(a-y)^{\frac{1}{2}}.dy=-\tfrac{2}{3}.\sqrt{a}.(a-y)^{\frac{3}{2}};$$

par conséquent

$$\int x.\sqrt{dx^2+dy^2}=2x.\sqrt{ay}+\tfrac{4}{3}.\sqrt{a}.(a-y)^{\frac{3}{2}}+c;$$

c étant la constante arbitraire. Elle doit être telle que cette intégrale soit nulle au point C; faisant donc $y=0$, on trouve

$$\frac{4a^2}{3}+c=0, \quad \text{ou} \quad c=-\frac{4a^2}{3};$$

donc

$$lx_{,}=\int x.\sqrt{dx^2+dy^2}=2x.\sqrt{ay}+\tfrac{4}{3}.\sqrt{a}.(a-y)^{\frac{3}{2}}-\frac{4a^2}{3},$$

et en divisant par la valeur de l,

$$x_{,}=x+\tfrac{2}{3}.\frac{(a-y)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{y}}-\tfrac{2}{3}.\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{y}}.$$

Cette valeur de $x_{,}$, jointe à celle de $y_{,}$, détermine complètement le centre de gravité de l'arc quelconque Cm; si cet arc est la demi-cycloïde CA,

on aura

$$y = a = CD, \quad x = DA;$$

par conséquent

$$x_{,} = DA - \tfrac{2}{3}.CD, \quad y_{,} = \tfrac{1}{3}.CD;$$

valeurs qui se construisent en portant sur la base AB, à partir du point A, une ligne AE, égale aux deux tiers de CD; en élevant au point E une perpendiculaire EG, sur cette base, et prenant $EG = AE$: le point G est le centre de gravité de la courbe CmA.

Si l'on demandait le centre de gravité d'un arc $m'Cm$, coupé en deux parties égales au point C, ce centre serait sur l'axe Cy; il suffirait donc de connaître sa distance à l'axe Cx, qui est évidemment la même que pour la moitié Cm de cet arc, c'est-à-dire, égale à $\frac{1}{3}.y$. Donc le centre de gravité d'un arc quelconque de cycloïde, partagé en deux parties égales au sommet de cette courbe, se trouve sur le diamètre du cercle générateur, au tiers de sa longueur, à partir du sommet.

106. Cherchons maintenant le centre de gravité de l'aire comprise entre deux courbes tracées dans un même plan, et données par leurs équations. Soient CmD et $C'm'D'$ (fig. 26) ces deux courbes; menons dans leur plan, les axes rectangulaires Ox et Oy, qui seront ceux des coordonnées; désignons par y et y', les coordonnées mp et $m'p$, correspondantes à la même abscisse Op, que nous représenterons par x; de manière que y et y' soient des fonctions de x, données par les équations de ces courbes.

Supposons que l'aire $CC'm'D'Dm$ soit celle que l'on considère, c'est-à-dire, supposons que cette aire soit terminée par les ordonnées AC et BD qui répondent à des abscisces données OA et OB; faisons

$$OA=a, \quad OB=b;$$

représentons l'aire $CC'm'mD'D$, par λ; enfin, appelons $y_{,}$ et $x_{,}$, les coordonnées de son centre de gravité qu'il s'agit de trouver.

Pour cela, je divise cette aire en une infinité d'élémens par des perpendiculaires élevées sur l'axe des x et séparées par des intervalles infiniment petits : $mm'n'n$ est l'élément compris entre les deux perpendiculaires ou ordonnées consécutives mp et nq; on peut le regarder comme un parallélogramme qui a pour base mm' et pour hauteur pq, différence entre les deux abscisses consécutives; cet élément sera donc égal à $(y-y').dx$, à cause de $mm'=y-y'$ et de $pq=dx$; par conséquent on aura d'abord

$$\lambda=\int(y-y').dx,$$

l'intégrale étant prise depuis $x=a$, jusqu'à $x=b$. De plus le centre de gravité de l'élément $mm'n'n$ tombe évidemment à son milieu; de manière que la distance de ce point à l'axe Ox est moyenne entre les deux coordonnées mp et $m'p$, ou égale à $\frac{1}{2}.(y+y')$; et sa distance à l'axe Oy est égale à $x+\frac{1}{2}.dx$, ou simplement à x, en négligeant $\frac{1}{2}.dx$, par rapport à x. Multipliant donc la première distance par la valeur $(y-y').dx$ de cet élément, ce qui donne $\frac{1}{2}.(y^2-y'^2).dx$, et intégrant ensuite depuis $x=a$

jusqu'à $x=b$, afin d'obtenir la somme des produits semblables, pour tous les élémens de λ, cette somme sera, d'après les formules du n° 100, égale au produit $\lambda y_{,}$; donc on aura

$$\lambda y_{,}=\tfrac{1}{2}.\int(y^2-y'^2).dx.$$

Multipliant de même la distance $x_{,}$ par $(y-y').dx$, et intégrant, nous aurons la valeur du produit $\lambda x_{,}$, savoir :

$$\lambda x_{,}=\int(y-y').xdx;$$

l'intégrale étant prise, comme les deux précédentes, depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$.

Ainsi, la solution du problème dépendra en général de trois intégrales définies, prises entre les mêmes limites. Lorsque l'un des deux axes Ox et Oy, coupera l'aire proposée en deux parties égales, le centre de gravité se trouvera sur cet axe, et il ne restera qu'une seule des deux distances, $x_{,}$ et $y_{,}$, à déterminer, ce qui n'exigera plus, avec la valeur de λ, que deux intégrations seulement.

Si l'aire proposée est terminée par l'axe Ox, au lieu de l'être par une courbe $C'm'D'$, de sorte que cette aire soit $CApBDm$, il faudra supposer $y'=0$, dans les formules précédentes qui se réduiront alors à

$$\lambda=\int ydx, \quad \lambda y_{,}=\tfrac{1}{2}.\int y^2dx, \quad \lambda x_{,}=\int yxdx.$$

107. Soit proposé, par exemple, le triangle CAB (fig. 27), dont on demande le centre de gravité. Je prends le sommet C, pour origine des coordonnées; l'axe Cy, parallèle à la base AB, et par consé-

quent l'axe Cx, perpendiculaire à cette même base. Les courbes qui terminent l'aire proposée, sont, dans ce cas, les deux droites CA et CB, passant par l'origine, et dont je représenterai les équations par

$$y = ax \quad \text{et} \quad y' = a'x.$$

Les formules générales deviendront donc, en y substituant ces valeurs de y et y',

$$\lambda = \int (a - a').xdx,$$
$$\lambda y_{,} = \tfrac{1}{2}.\int (a^2 - a'^2).x^2dx,$$
$$\lambda x_{,} = \int (a - a').x^2dx.$$

Ces intégrales doivent être prises depuis $x = 0$, qui répond au point C, jusqu'à $x = h$, en désignant par h la hauteur CD du triangle; d'où l'on conclut

$$\lambda = (a - a').\frac{h^2}{2}, \quad \lambda y_{,} = (a^2 - a'^2).\frac{h^3}{6}, \quad \lambda x_{,} = (a - a').\frac{h^3}{3};$$

et par conséquent

$$y_{,} = (a + a').\frac{h}{3}, \qquad x_{,} = \frac{2h}{3}.$$

Prenons donc $CE = \frac{2}{3}.h = \frac{2}{3}.CD$, et élevons la perpendiculaire EG égale à cette valeur de $y_{,}$, le point G sera le centre de gravité demandé.

Si l'on joint le point G et le point C, et qu'on prolonge la droite CG jusqu'à ce qu'elle coupe la base AB, en F, il est aisé de voir que ce point F sera le milieu de AB. En effet, en faisant $x = CD = h$, dans les valeurs de y et y', il vient

$$AD = ah \quad \text{et} \quad BD = a'h;$$

ce qui change la valeur de y, ou de GE, en celle-ci

$$GE = \frac{1}{3}.(AD + BD);$$

mais on a la proportion

$$CE : GE :: CD : FD;$$

donc, à cause de $CE = \frac{2}{3}.CD$, on aura

$$FD = \frac{3}{2}.GE = \frac{1}{2}.(AD + BD);$$

valeur qui appartient évidemment au milieu de la droite AB. On voit aussi que CG est les deux tiers de CF, de même que CE est les deux tiers de CD; car les lignes CD et CF sont coupées en parties proportionnelles par les parallèles GE et FD.

Concluons donc que *le centre de gravité d'un triangle se trouve sur la droite qui joint son sommet et le milieu de sa base, aux deux tiers de cette droite à partir du sommet.*

108. Ce théorème se démontre fort simplement de cette autre manière.

Après avoir mené la ligne CF (fig. 28), qui joint le sommet C et le milieu de la base AB, coupons cette droite par une suite de parallèles à AB, telles que ll', mm', nn'; par les points m et m', où la droite mm' rencontre les côtés CA et CB du triangle, menons des droites lmn et $l'm'n'$, parallèles à CF, et exécutons la même construction pour toutes les droites semblables à mm' : nous formerons par là deux suites de parallélogrammes, tels que $lmm'l'$ et $mnn'm'$ qui seront, pour ainsi dire, inscrits et cir-

conscrits au triangle. Or, la ligne *CF* coupe toutes les parallèles à la base *AB*, comme la base elle-même, c'est-à-dire, en deux parties égales; donc elle partage tous ces parallélogrammes en deux parties parfaitement égales, et par conséquent leurs centres de gravité se trouvent tous sur cette droite; donc aussi le centre de gravité de la somme des parallélogrammes inscrits et celui de la somme des parallélogrammes circonscrits, sont deux points de cette même droite. Mais à mesure que l'on multipliera le nombre des parallèles à la base, ou qu'on diminuera leurs distances, ces deux sommes différeront de moins en moins entre elles et avec le triangle CAB qui est leur limite, comme le cercle est la limite des polygones inscrits et des polygones circonscrits; leurs centres de gravité approcheront donc continuellement, et d'aussi près qu'on voudra, de se confondre avec celui du triangle; et comme ces centres ne cesseront pas d'appartenir à la droite *CF*, il en faut conclure que celui du triangle est aussi un des points de cette droite.

Par le même raisonnement, on prouvera que ce point doit aussi se trouver sur la droite *AK* (fig. 29), qui joint le sommet *A* et le milieu du côté opposé *BC*; donc le centre de gravité du triangle *ABC* est placé à l'intersection *G* des deux droites *CF* et *AK*, *F* et *K* étant les milieux des côtés *AB* et *CB*. Mais si l'on mène la droite *FK*, cette droite sera parallèle à *AB*, puisqu'elle coupe les deux côtés *AB* et *CB* en parties égales; les triangles

CGA et KGF seront donc semblables, ainsi que les triangles FKB et ACB; et l'on aura

$$FG : CG :: FK : AC :: FB : AB;$$

donc FG sera moitié de CG, comme FB est moitié de AB; par conséquent CG sera les deux tiers de la ligne entière CF: ce qu'il s'agissait de démontrer.

Le centre de gravité du triangle étant connu, on trouvera aisément celui d'un polygone quelconque, en le décomposant en triangles, et en faisant usage des formules du n° 100, dans lesquelles on substituera les aires de ces triangles, aux volumes v, v', v'', etc., et l'aire entière du polygone, au volume V.

109. Le centre de gravité du segment de cercle $BADE$ (fig. 24), se trouve sur le rayon CA qui le coupe en deux parties égales. Pour déterminer sa distance au centre C, prenons ce point pour origine des coordonnées; l'axe des x, sur le rayon CA. et faisons $CA=r$ et $CE=a$. L'équation du cercle sera

$$y^2+x^2=r^2.$$

Les courbes qui terminent l'aire $BADE$ sont les arcs BA et DA; on a pour l'un, $y=+\sqrt{r^2-x^2}$, et pour l'autre, $y=-\sqrt{r^2-x^2}$; il faut donc substituer ces deux valeurs à la place de y et de y', dans les formules générales du n° 106; ce qui donne

$$?x_{,}=2.\int\sqrt{r^2-x^2}.xdx.$$

Intégrant

intégrant depuis $x = a$ jusqu'à $x = r$, il vient

$$\lambda x_{,} = \tfrac{2}{3}.(r^2 - a^2)^{\frac{3}{2}};$$

donc en désignant par c, la corde BD, ou le double de l'ordonnée BE, on aura

$$c = 2.\sqrt{r^2 - a^2}, \quad \text{et} \quad x_{,} = \frac{1}{12}.\frac{c^3}{\lambda}.$$

Prenant donc sur le rayon CA, à partir du point C, une ligne CG égale à cette valeur de $x_{,}$, le point G sera le centre de gravité du segment $BADE$, dont l'aire est représentée par λ.

110. Le centre de gravité du secteur $CBAD$ se conclut de ceux du segment $BADE$ et du triangle CBD; car soit $CG' = \tfrac{2}{3}.CE$, c'est-à-dire, soit G' le centre de gravité de ce triangle; si l'on partage la distance GG' de ce centre de gravité à celui du segment, en deux parties $G'G''$ et $G''G$ réciproquement proportionnelles aux aires CAB et $BADE$, le point G'' sera le centre de gravité de la somme de ces deux aires, ou du secteur $CBAD$.

Mais on peut trouver ce point G'', d'une manière plus simple et plus directe, en partageant l'arc BAD, en une infinité de parties égales, et menant ensuite des rayons du centre C, à tous les points de division; l'aire $CBAD$ se trouvera alors décomposée en une infinité de secteurs infiniment petits et égaux entre eux, que l'on pourra prendre pour des triangles, et dont les centres de gravité se trouveront à une

distance du point C, égale aux deux tiers du rayon; de sorte que si l'on décrit de ce point comme centre, et d'un rayon égal à $\frac{2}{3}.CA$, un arc de cercle $B'A'D'$, cet arc sera le lieu de tous les centres de gravité; et à cause que tous les secteurs élémentaires sont égaux entre eux, le centre de gravité de l'arc $B'A'D'$ sera celui de leur somme ou de l'aire entière $CBAD$. Donc, d'après le théorème du n° 104, nous pouvons dire que la distance du *centre de gravité d'un secteur circulaire, au centre du cercle, est quatrième proportionnelle aux deux tiers du rayon, à la corde et à l'arc qui lui correspondent.*

111. Si l'on veut avoir le centre de gravité de l'aire Cpm (fig. 25), terminée par un arc de cycloïde, on éliminera dx dans les dernières formules du n° 106, au moyen de l'équation différentielle de cette courbe rapportée précédemment (n° 105). La valeur de λ devient alors

$$\lambda=\int\frac{y(a-y).dy}{\sqrt{ay-y^2}}=\int\sqrt{ay-y^2}.dy;$$

l'intégrale étant prise depuis $y=0$, jusqu'à $y=mp$. Or, CnD étant le cercle générateur dont le diamètre CD est représenté par a, si l'on abaisse du point m, une perpendiculaire mq sur ce diamètre, de sorte qu'on ait $Cq=mp=y$, cette dernière intégrale exprimera l'aire du segment Cnq de ce cercle; par conséquent l'aire Cmp, ou λ, est égale à Cnq, et nous pouvons la regarder comme connue.

La formule $\lambda y_{,} = \frac{1}{2} . \int y^2 dx$, devient en même tems

$$\lambda y_{,} = \frac{1}{2} . \int \frac{y^2 (a-y) . dy}{\sqrt{ay-y^2}} = \frac{1}{2} . \int y \sqrt{ay-y^2} . dy;$$

on a identiquement

$$\int y \sqrt{ay-y^2} . dy = -\int (\tfrac{1}{2}a - y) . \sqrt{ay-y^2} . dy + \tfrac{1}{2}a . \int \sqrt{ay-y^2} . dy;$$

de plus

$$\int (\tfrac{1}{2}a - y) . \sqrt{ay-y^2} . dy = \tfrac{1}{3} (ay-y^2)^{\frac{3}{2}};$$

d'où l'on conclut, en mettant λ à la place de l'intégrale $\int \sqrt{ay-y^2} . dy$,

$$\lambda y_{,} = -\tfrac{1}{6} . (ay-y^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{4} . a\lambda :$$

on n'ajoute pas de constante arbitraire, parce que le second membre de cette équation doit être nul quand $y = 0$.

Quant à la valeur de $x_{,}$, elle dépend d'une intégrale que l'on ne peut pas obtenir sous forme finie, par les moyens connus, de manière qu'il faut recourir aux méthodes d'approximation pour calculer la distance du centre de gravité de l'aire *Cpm*, à l'axe *CD*; mais si l'on demande celui de l'aire *m'p'Cpm*, composée de deux portions égales de part et d'autre de cet axe, ce point se trouvera sur la ligne *CD*, et la valeur de $y_{,}$ suffira pour en déterminer la position. S'il s'agit de l'aire *BFCEA*, terminée par la cycloïde entière *BCA*, on aura $y = CD = a$, ce qui réduit la valeur de $\lambda y_{,}$, à $\frac{1}{4} . a\lambda$; d'où l'on conclut

$y_{,}=\frac{1}{4}.a$: le centre de gravité de cette aire se trouve donc au quart du diamètre CD, à partir du point C, ou aux trois quarts, à partir du point D.

112. Supposons maintenant que l'aire $CC'm'D'Dm$ (fig. 26) tourne autour de l'axe Ox; elle engendrera un solide de révolution, qui sera compris, d'une part, entre deux plans perpendiculaires à l'axe Ox et menés par les points A et B, et d'une autre part, entre les deux surfaces de révolution, engendrées en même tems par les courbes CmD et $C'm'D'$. Les centres de gravité de ces deux surfaces, ainsi que celui du solide qu'elles recouvrent, se trouveront évidemment quelque part sur l'axe Ox; il suffira donc pour les déterminer, de trouver leurs distances au point O de cet axe. Or, le point G étant le centre de gravité du solide, et V son volume, si l'on fait $OG=x_{,}$, et que l'on conserve toutes les notations du n° 106, on aura

$$V=\pi.\int(y^2-y'^2).dx, \quad Vx_{,}=\pi.\int(y^2-y'^2).xx;$$

π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, et les intégrales étant prises depuis $x=OA=a$, jusqu'à $x=OB=b$. Et de même, si G' est le centre de gravité de la surface extérieure, engendrée par la courbe CmD; que S représente cette surface, et qu'on pose $OG'=x_{,,}$, on aura

$$S=2\pi.\int y.\sqrt{dx^2+dy^2}, \quad x_{,,}S=2\pi.\int yx.\sqrt{dx^2+dy^2},$$

en prenant les intégrales aussi depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$. Le centre de gravité de la surface intérieure,

engendrée par la courbe $C m' D'$, se déterminera au moyen de ces mêmes formules, dans lesquelles on emploiera l'ordonnée y' de cette courbe, à la place de l'ordonnée y de la courbe CmD.

La démonstration de ces formules est fondée sur les mêmes principes qui nous ont guidés dans les problèmes précédens.

En effet, 1°. décomposons le volume V en une infinité de tranches annullaires, comprises entre des plans perpendiculaires à l'axe Ox, dont les distances soient infiniment petites. La tranche qui répond à l'abscisse quelconque Op, sera le solide engendré par l'élément $mm'n'n$ de l'aire génératrice; lequel solide sera égal à $\pi.y^2dx-\pi.y'^2dx$; car en négligeant les puissances supérieures de dx, on peut le considérer comme la différence entre deux cylindres qui ont pour hauteur commune pp' ou dx, et pour bases, les cercles dont les rayons sont les ordonnées pm et pm', ou y et y'. Le volume V, ou la somme de toutes les tranches semblables, sera donc exprimé par l'intégrale $\int(\pi.y^2dx-\pi.y'^2dx)$, qui est la même chose que $\pi.\int(y^2-y'^2).dx$, et qui doit être prise depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$. De plus, si l'on multiplie le volume $\pi.y^2dx-\pi.y'^2dx$, d'une tranche quelconque, par la variable x qui est la distance de son centre de gravité, à un plan perpendiculaire à l'axe Ox et mené par le point O, et qu'on fasse la somme des produits semblables pour toutes les tranches, on aura, d'après les formules du n° 100, la valeur du produit $Vx_{,}$; par conséquent ce produit est égal à l'intégrale de $\pi.y^2xdx-\pi.y'^2xdx$, prise entre les

limites $x=a$ et $x=b$; c'est-à-dire, qu'on a

$$Vx_{,}=\pi.\int(y^2-y'^2).dx.$$

2°. La surface engendrée par la courbe CmD se trouvera en même tems divisée en une infinité de zônes d'une largeur infiniment petite. Celle qui répond à l'abscisse mp est engendrée par l'élément mn de cette courbe ; or, cet arc infiniment petit mn se confond avec sa corde, et la zône qu'il engendre doit être regardée, par conséquent, comme un cône tronqué à bases parallèles, dont les bases ont pour rayons les deux ordonnées consécutives mp et nq, ou y et $y+dy$, et qui a pour côté la corde mn, égale à $\sqrt{dx^2+dy^2}$; la surface de ce cône tronqué est égale, d'après les élémens de géométrie, au produit $\pi.(mp+nq).mn$, dont la valeur est $\pi.(2y+dy).\sqrt{dx^2+dy^2}$, et qui se réduit à $2\pi y.\sqrt{dx^2+dy^2}$, en négligeant dy par rapport à y; intégrant donc cette différentielle depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, on aura la somme de toutes les zônes, ou la surface entière S. On voit de même que le produit $x_{o}S$ s'obtiendra en multipliant la zône $2\pi y.\sqrt{dx^2+dy^2}$, par x, et intégrant ensuite la formule $2\pi yx.\sqrt{dx^2+dy^2}$, depuis $x=a$, jusqu'à $x=b$; car cette intégrale exprimera la somme de toutes les zônes élémentaires, multipliées par les distances de leurs centres de gravité, à un plan perpendiculaire à Ox et mené par le point O; laquelle somme doit être égale à la surface entière S, mul-

tipliée par la distance $x_{\prime\prime}$, de son centre de gravité, au même plan (n° 100). Donc on aura, comme il s'agissait de le prouver,

$$x_{\prime\prime}S = 2\pi . \int yx . \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

113. Si la courbe génératrice est l'arc de cercle AB (fig. 24), tournant autour du rayon CA, on aura, en conservant les notations du n° 109,

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}};$$

d'où il suit

$$S = 2\pi . \int y . \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi . \int rdx,$$

$$x_{\prime\prime}S = 2\pi . \int yx . \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi . \int rxdx;$$

prenant donc les intégrales depuis $x = CE = a$, jusqu'à $x = CA = r$, on trouve

$$S = 2\pi r . (r - a), \quad x_{\prime\prime}S = \pi r . (r^2 - a^2);$$

par conséquent

$$x_{\prime\prime} = \tfrac{1}{2} . (r + a) = \frac{CA + CE}{2};$$

d'où l'on peut conclure que le centre de gravité de la calotte sphérique, engendrée par l'arc AB, se trouve au milieu de la flèche AE.

Nous nous dispensons de chercher le centre de gravité du segment sphérique, engendrée par l'aire EAB, parce que nous déterminerons tout à l'heure

celui d'un segment d'ellipsoïde qui comprend le segment sphérique comme cas particulier.

Les formules générales s'appliquent sans difficulté à la surface engendrée par un arc de cycloïde. Pour abréger, nous ne rapporterons point ici le détail du calcul, et nous nous contenterons d'en énoncer le résultat dans le cas où l'arc générateur est une demi-cycloïde entière.

Le centre de gravité de la surface engendrée par la demi-cycloïde CmA (fig. 25), tournant autour de l'axe CE, se trouve sur cet axe, à une distance du point E, égale à $\frac{4}{9}.CD$. Le centre de gravité du solide recouvert par cette surface dépend d'une intégrale qui n'est pas connue sous forme finie.

114. En comparant les formules qui donnent le volume V du solide de révolution engendré par l'aire $CC'm'D'Dm$ (fig. 26), tournant autour de l'axe Ox, et la distance $y_{,}$ du centre de gravité de cette aire à l'axe Ox, on aperçoit entre elles un rapport qui mérite d'être remarqué. En effet, λ étant l'aire génératrice, nous venons de trouver (n°s 106 et 112)

$$V=\pi.\int(y^2-y'^2).dx, \quad \lambda y_{,}=\tfrac{1}{2}.\int(y^2-y'^2).dx;$$

d'où l'on tire, en éliminant l'intégrale qui est prise entre les mêmes limites dans les deux formules,

$$V=2\pi y_{,}.\lambda;$$

par conséquent le volume V peut s'exprimer au moyen des deux quantités λ et $y_{,}$. Mais, pour plus

de généralité, considérons un segment de ce volume, compris entre deux plans quelconques, menés par l'axe Ox. Soit ω l'angle de ces plans; il est évident, par la nature du solide de révolution, que chaque segment, comme celui-ci, est au volume entier, comme l'angle qui lui correspond est à quatre angles droits; donc V' étant le volume de ce segment, nous aurons

$$V' : V :: \omega : 2\pi;$$

d'où l'on tire en mettant pour V sa valeur,

$$V' = \omega y_{,}.V.$$

Or, pendant que l'aire génératrice, en tournant autour de l'axe Ox, engendre le segment V', le centre de gravité de cette aire décrit un arc de cercle dont le centre est dans l'axe, qui a pour rayon $y_{,}$, et dont la longueur est égale à $\omega y_{,}$; il résulte donc de la valeur de V', que *la portion de solide engendrée par l'aire d'une courbe plane, tournant autour d'une droite menée dans son plan, est égale au produit de l'aire génératrice multipliée par l'arc de cercle parcouru par son centre de gravité.*

Ce théorème est dû au géomètre *Guldin,* dont il a conservé le nom. Comme il a lieu quelle que soit la distance des deux courbes CmD et $C'm'D'$, qui terminent l'aire génératrice, il en faut conclure qu'il subsiste encore, lorsque cette distance devient nulle et que ces deux courbes coïncident. Ainsi l'on peut encore dire que *la portion de surface engendrée par une courbe plane, tournant autour d'une*

droite menée dans son plan, est égale à la longueur de la courbe génératrice, multipliée par l'arc de cercle parcouru par son centre de gravité.

Ce second théorème résulte d'ailleurs des formules (nos 103 et 112)

$$ly_{,}=\int y\cdot\sqrt{dx^2+dy^2},\qquad S=2\pi.\int y\cdot\sqrt{dx^2+dy^2};$$

dans lesquelles $l, y_{,}$ et S représentent la longueur de la courbe génératrice, la distance de son centre de gravité à l'axe des x, et la surface engendrée pendant une révolution entière de cette courbe. En effet, en éliminant l'intégrale contenue dans ces deux équations et qui s'y rapporte aux mêmes limites, il vient

$$S=2\pi y_{,}.l;$$

désignant donc par ω l'angle de deux plans quelconques, menés par l'axe des x, et par S', la portion de la surface S, interceptée entre ces plans, et qui est à la surface entière comme l'angle ω est à quatre angles droits, nous aurons

$$S'=\frac{\omega}{2\pi}.S;$$

et par conséquent

$$S'=\omega y_{,}.l;$$

équation qui renferme le théorème qu'on vient d'énoncer.

115. La décomposition d'un solide en tranches cylindriques, d'une épaisseur infiniment petite et parallèles entre elles, sert à trouver, non-seule-

ment le centre de gravité d'un solide de révolution, comme on l'a vu précédemment (n° 112), mais encore celui d'un solide quelconque, symétrique par rapport à un axe. C'est ce que nous allons expliquer, en prenant pour exemple l'ellipsoïde.

Soient a, b, c, ses trois demi-diamètres principaux, on aura

$$a^2b^2z^2+a^2c^2y^2+b^2c^2x^2=a^2b^2c^2,$$

pour l'équation de sa surface, rapportée à ces diamètres. Décomposons cet ellipsoïde en une infinité de parties, par des plans parallèles à celui des x, y; l'élément qui répond à la coordonnée quelconque z devra être regardé comme un cylindre à base elliptique, dont la hauteur infiniment petite est la différentielle dz; en désignant donc par Z la surface de sa base, on aura Zdz pour son volume; par conséquent l'intégrale $\int Zdz$, prise depuis $z=\alpha$ jusqu'à $z=\mathcal{C}$, exprimera le volume de la portion d'ellipsoïde comprise entre les deux sections perpendiculaires à l'axe des z, qui répondent à $z=\alpha$ et $z=\mathcal{C}$. De même, si l'on prend entre ces mêmes limites, l'intégrale $\int zZdz$, on aura la somme de toutes les tranches qui composent ce volume, multipliées par les distances de leurs centres de gravité, au plan des x, y. Cette intégrale sera donc égale au volume $\int Zdz$, multipliée par la distance de son centre de gravité, au même plan; de sorte qu'en appelant $z_{,}$ l'ordonnée de ce point, parallèle à l'axe des z, on aura

$$z_{,}.\int Zdz=\int zZdz. \qquad (1)$$

Il ne reste plus, pour déterminer $z_{,}$, qu'à substituer dans cette équation, à la place de Z, sa valeur en fonction de z, et à effectuer les intégrations qui sont indiquées; et comme le centre de gravité du volume $\int Zdz$ doit se trouver sur l'axe des z, à cause de la symétrie de l'ellipsoïde par rapport à cet axe, il s'ensuit que la position de ce centre sera déterminée quand la valeur de $z_{,}$ sera connue.

Or, la section de l'ellipsoïde, parallèle au plan des x, y, et correspondante à l'ordonnée z, est une ellipse dont l'équation est

$$a^2y^2 + b^2x^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}.(c^2 - z^2);$$

ses deux demi-axes sont donc

$$\frac{b}{c}.\sqrt{c^2 - z^2} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c}.\sqrt{c^2 - z^2};$$

on sait de plus que la surface d'une ellipse est égale au produit de ces deux quantités, multiplié par le rapport de la circonférence au diamètre; en désignant donc ce rapport par π, on aura

$$Z = \pi.\frac{ab}{c^2}.(c^2 - z^2).$$

On conclut de là

$$\int Zdz = \pi.\frac{ab}{c^2}.\left(c^2z - \frac{z^3}{3}\right) + C,$$

$$\int zZdz = \pi.\frac{ab}{c^2}.\left(\frac{c^2z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right) + C';$$

C et C' étant des constantes arbitraires. On aura

donc, pour les intégrales définies, prises depuis $z = \alpha$ jusqu'à $z = \mathcal{C}$,

$$\int Z dz = \frac{\pi ab}{c^2} \cdot \left[c^2 (\alpha - \mathcal{C}) - \frac{(\alpha^3 - \mathcal{C}^3)}{3} \right],$$

$$\int z Z dz = \frac{\pi ab}{c^2} \cdot \left[\frac{c^2 (\alpha^2 - \mathcal{C}^2)}{2} - \frac{(\alpha^4 - \mathcal{C}^4)}{4} \right].$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), et réduisant, on trouve

$$z_{,} = \frac{3}{4} \cdot (\alpha + \mathcal{C}) \cdot \left[\frac{2c^2 - \alpha^2 - \mathcal{C}^2}{3c^2 - \alpha^2 - \mathcal{C}^2 - \alpha\mathcal{C}} \right].$$

Cette expression nous fait voir que la position du centre de gravité d'une portion d'ellipsoïde, comprise entre deux plans perpendiculaires à l'un des trois diamètres principaux, est indépendante des valeurs des deux autres diamètres : de sorte que si l'on décrivait une sphère sur le diamètre $2c$, le centre de gravité du segment sphérique compris entre ces deux plans, coïnciderait avec celui du segment de l'ellipsoïde donné, quels que soient les deux autres diamètres $2a$ et $2b$.

Si l'on veut avoir le centre de gravité du demi-ellipsoïde, il faudra faire $\mathcal{C} = c$, $\alpha = 0$; ce qui donne $z_{,} = \frac{3}{8} \cdot c$. Ainsi le centre de gravité de ce solide se trouve sur le demi-diamètre perpendiculaire à sa base, aux trois huitièmes, à partir de cette base, ou bien, aux cinq huitièmes, à partir du sommet.

116. Le centre de gravité d'une pyramide ou d'un cône à base quelconque, s'obtiendra aussi en

décomposant ce solide en une infinité de tranches parallèles à sa base. Considérons, en effet, la pyramide *SABCDE* (fig. 30); soit *abcde* une section parallèle à la base *ABCDE*, et *F* le centre de gravité de ce dernier polygone; joignons le point *F* et le sommet *S*, par la droite *SF* qui rencontre la section *abcde* au point *f*: les deux polygones *abcde* et *ABCDE* sont semblables, et le point *f* est situé dans le premier, comme le point *F* dans le second; de manière que *F* étant le centre de gravité de la base, *f* est celui de la section parallèle. Ainsi la ligne *SF* passe par les centres de gravité de toutes les sections parallèles à la base; par conséquent si l'on décompose le solide en tranches d'une épaisseur infiniment petite, et qui soient parallèles à la base, la droite *SF* sera le lieu de leurs centres de gravité; et par conséquent aussi le centre de gravité de la pyramide entière se trouvera sur cette droite.

Soit donc $z_{,}$, la distance inconnue de ce point au plan de la base, Z l'aire de la section quelconque *abcde*, et z sa distance au même plan; on trouvera pour déterminer $z_{,}$, l'équation (1) du nº précédent, dans laquelle il faut substituer la valeur de Z en fonction de z. Or, si l'on abaisse du sommet une perpendiculaire SH sur la base, que H' soit le point où elle coupe la section *abcde*, et que b représente l'aire de la base, on aura, comme on sait par les élémens de géométrie,

$$Z : b :: \overline{SH'}^2 : \overline{SH}^2;$$

faisant donc la hauteur $SH=h$, on aura $SH'=h-z$, et

$$Z=\frac{b(h-z)^2}{h^2};$$

substituant cette valeur dans l'équation (1), il vient

$$z_{,}.\int\frac{b(h-z)^2}{h^2}.dz=\int\frac{b(h-z)^2}{h^2}.zdz;$$

ou bien en simplifiant

$$z_{,}.\int(h-z)^2.dz=\int(h-z)^2.zdz.$$

Ces intégrales doivent être prises depuis $z=0$, jusqu'à $z=SH=h$; entre ces limites, on trouve

$$\int(h-z)^2.dz=\frac{h^3}{3},\qquad \int(h-z)^2.zdz=\frac{h^4}{12};$$

d'où l'on conclut

$$z_{,}=\frac{1}{4}.h.$$

La distance du point cherché à la base, est donc égale au quart de la hauteur; par conséquent si l'on prend $HK=\frac{1}{4}.SH$, et qu'on mène par le point K un plan parallèle à la base, ce plan coupera la droite SF en un point G qui sera le centre de gravité de la pyramide; mais FG sera le quart de SF, comme HK est le quart de SH: il s'ensuit donc que *le centre de gravité d'une pyramide à base quelconque, se trouve sur la droite qui joint le sommet et le centre de gravité de la base, au quart de cette ligne à partir de la base, ou aux trois quarts à partir du sommet.*

Ce résultat convient également aux cônes à base quelconque, parce qu'un cône peut être regardé comme une pyramide dont la base a une infinité de côtés.

117. On peut démontrer directement ce théorème, en considérant d'abord une pyramide triangulaire *ABCD* (fig. 31). On prouvera, en la divisant en tranches infiniment petites et parallèles à la base *ABD*, ou bien, en employant la méthode des limites, comme dans le n° 108, que son centre de gravité se trouve sur la droite *CF*, menée du sommet *C* au point *F* que je suppose être le centre de gravité du triangle *ABD*. Par la même raison, le centre de gravité de cette pyramide doit aussi se trouver sur la droite *AE*, qui joint un autre sommet *A* et le centre de gravité *E* du triangle *CBD*; donc ces deux droites *AE* et *CF* doivent se couper en un certain point *G* qui sera le centre de gravité de la pyramide *ABCD*. Or, *K* étant le milieu du côté *BD*, base commune aux deux triangles *CBD* et *ABD*, leurs centres de gravité *F* et *E* se trouvent sur les droites *AK* et *CK*, et l'on a (n° 107)

$$FK = \tfrac{1}{3}.AK, \quad EK = \tfrac{1}{3}.CK;$$

les deux droites *AE* et *CF* sont donc situées dans un même plan, savoir, dans le plan *ACK* mené par le côté *AC* et par le point *K*, ce qui est déjà la condition nécessaire pour qu'elles se coupent; en outre si l'on tire la droite *FE*, elle sera parallèle à

la

la base AC du triangle ACK, puisqu'on a la proportion

$$FK : EK :: AK : CK;$$

les triangles ACG et FEG seront donc semblables, ainsi que les triangles ACK et FEK; par conséquent on aura

$$GF : CG :: EF : AC :: FK : AK;$$

donc GF sera le tiers de CG, de même que FK est le tiers de AK; donc aussi cette partie GF sera le quart de la ligne entière CF; ce qu'il s'agissait de prouver.

118. Ce résultat étant démontré pour une pyramide triangulaire, il est aisé de l'étendre à une pyramide quelconque $SABCDE$ (fig. 32). En effet, quelle que soit sa base, on peut toujours la partager en un certain nombre de triangles, et décomposer la pyramide donnée en autant de pyramides triangulaires, qui auront pour bases ces différens triangles et leur sommet commun au point S. Soit f, f', f'', les centres de gravité de ces triangles; tirons les lignes Sf, Sf', Sf'', et prenons sur une d'elles, une partie $fg = \frac{1}{4}.Sf$; par le point g, menons un plan parallèle à la base, qui rencontre les autres lignes aux points g', g'' : toutes ces lignes seront coupées en parties proportionnelles par ce plan; de sorte qu'on aura aussi $f'g' = \frac{1}{4}.Sf'$, $f''g'' = \frac{1}{4}.Sf''$: les points g, g', g'', seront donc les centres de gravité des pyramides partielles. Ces points étant tous compris dans un même plan, le centre de gravité de la pyra-

mide entière s'y trouvera aussi (n° 99); mais on démontre pour une pyramide à base quelconque, comme pour une pyramide triangulaire, que son centre de gravité est un des points de la droite qui joint celui de la base et le sommet; donc F étant le centre de gravité du polygone $ABCDE$, celui de la pyramide que nous considérons, se trouvera au point G où la ligne SF rencontre le plan mené par le point g; et comme ce plan parallèle à la base, coupe en parties proportionnelles toutes les droites qui partent du sommet et aboutissent à la base, il s'ensuit qu'on aura $FG=\frac{1}{4}.SF$, puisqu'on a $fg=\frac{1}{4}.Sf$: d'où il résulte le théorème du n° 116, dans toute sa généralité.

119. Comme tout polyèdre est décomposable en pyramides, on pourra maintenant déterminer le centre de gravité d'un polyèdre quelconque, au moyen des formules du n° 100.

Relativement aux prismes à bases parallèles, la décomposition en pyramides est inutile; car il est évident que le centre de gravité d'un tel corps doit se trouver au milieu de la droite qui joint les centres de gravité de ses deux bases; et de même pour un cylindre quelconque, pourvu que ses deux bases soient parallèles.

120. Pour compléter ce que nous avons à dire sur les centres de gravité, nous donnerons les formules générales d'après lesquelles on déterminera celui d'un corps de forme quelconque, et celui de telle portion qu'on voudra de sa surface.

Représentons par

$$f(x, y, z) = 0,$$

l'équation d'une surface quelconque, et supposons qu'en la différentiant, il vienne

$$dz = pdx + qdy;$$

ensorte que p et q sont des fonctions de x, y, z qui désignent ici les différences partielles de z, par rapport à x et à y : on démontre dans le calcul différentiel, que l'élément de cette surface est exprimé par

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2}.dxdy;$$

d'où il suit que S étant l'aire d'une portion quelconque de cette même surface, sa valeur est donnée par cette double intégrale

$$S = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}.dxdy,$$

prise entre des limites convenables.

De même $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$ désignant les coordonnées du centre de gravité de cette portion de surface, les valeurs des produits $x_{,,}S$, $y_{,,}S$, $z_{,,}S$, résultant du théorème du n° 100, seront aussi données par de doubles intégrales semblables à la précédente, savoir :

$$x_{,,}S = \iint x.\sqrt{1 + p^2 + q^2}.dxdy,$$
$$y_{,,}S = \iint y.\sqrt{1 + p^2 + q^2}.dxdy,$$
$$z_{,,}S = \iint z.\sqrt{1 + p^2 + q^2}.dxdy.$$

Ainsi les valeurs de $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$, dépendront de quatre doubles intégrales qui devront être prises,

dans chaque cas particulier, entre des limites telles, qu'elles comprennent toutes la portion de surface que l'on veut considérer.

121. Si l'on coupe un volume quelconque, par une première suite de plans infiniment rapprochés et parallèles au plan des x, y; par une suite semblable de plans parallèles à celui de x, z; et enfin, par une troisième suite de plans parallèles à celui des y, z, le volume se trouvera décomposé en parallélépipèdes rectangles, infiniment petits dans leurs trois dimensions, et qui auront leurs côtés parallèles aux axes des coordonnées. Les côtés de celui qui répond aux coordonnées quelconques x, y, z, seront les différentielles dx, dy, dz; son volume sera donc égal au produit $dxdydz$, et V étant le volume entier que l'on considère, sa valeur sera donnée par cette triple intégrale

$$V = \int\int\int dxdydz.$$

De plus $x_{\prime}$, $y_{\prime}$, $z_{\prime}$ désignant les coordonnées de son centre de gravité, on aura, d'après le n° 100,

$$Vx_{\prime} = \int\int\int x.dxdydz, \quad Vy_{\prime} = \int\int\int y.dxdydz, \quad Vz_{\prime} = \int\int\int z.dxdydz.$$

Mais si le corps dont on demande le centre de gravité, n'est pas homogène, il ne faudra pas, comme dans le n° 100, substituer les volumes aux poids. Supposons que la densité varie d'une manière continue, dans toute l'étendue du corps, de sorte qu'on puisse la regarder comme une fonction des variables x, y, z, donnée dans chaque cas particulier; soit ρ cette densité variable; le poids de

l'élément dont le volume est $dxdydz$, sera égal au produit (n° 94)

$$g\rho.dxdydz,$$

g désignant la gravité; donc le poids entier du corps sera donné par cette intégrale triple

$$\int\int\int g\rho.dxdydz;$$

ou bien, à cause que g est un facteur constant, ce poids sera égal à gM, en faisant, pour abréger,

$$M=\int\int\int\rho.dxdydz.$$

Cela posé, les formules du n° 99, appliquées à des poids infiniment petits, deviendront, en supprimant le facteur g commun aux deux membres de chaque équation,

$$Mx_{,}=\int\int\int x\rho.dxdydz,$$
$$My_{,}=\int\int\int y\rho.dxdydz,$$
$$Mz_{,}=\int\int\int z\rho.dxdydz;$$

$x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, étant toujours les coordonnées du centre de gravité. Dans chaque cas particulier, ces intégrales triples devront être prises entre des limites qui comprennent tous les points du corps dont on cherche le centre de gravité.

Ces formules générales, relatives aux centres de gravité des surfaces et des corps hétérogènes, renferment, comme cas particuliers, toutes celles dont nous avons fait usage dans les n^os^ précédens; mais nous ne nous arrêterons point à les en déduire.

122. Dans ces formules, les points du corps sont supposés déterminés de position par trois coordonnées rectangulaires x, y, z, et l'élément du volume est exprimé au moyen de leurs différentielles dx, dy, dz; quelquefois il est nécessaire, pour rendre les intégrations possibles, de donner une autre forme à cet élément; nous allons donc substituer aux variables x, y, z, un autre système de coordonnées, et nous chercherons l'élément du volume, en fonction des différentielles de ces nouvelles coordonnées.

Considérons le point quelconque m (fig. 33) qui répond aux coordonnées x, y, z, parallèles aux axes rectangulaires Ox, Oy, Oz; joignons ce point à l'origine O, et abaissons du point m, la perpendiculaire mp sur le plan des x, y : soit ensuite

$$Om = r, \quad mOz = \theta, \quad pOx = \omega.$$

Il est évident que quand le rayon vecteur r et les deux angles θ et ω seront donnés, le point m sera déterminé de position; de plus, il est aisé de s'assurer que ces nouvelles coordonnées pourront convenir à tous les points de l'espace, en regardant r comme une quantité positive qui peut croître indéfiniment, depuis zéro jusqu'à l'infini; en donnant à ω, toutes les valeurs comprises entre zéro et 400°, et à θ, toutes les valeurs, depuis zéro jusqu'à 200° seulement. On peut donc employer les variables r, θ, ω, au lieu des variables x, y, z; et l'on trouve, sans difficulté, pour les valeurs de celles-ci, en

fonctions des premières,

$$x = r.\sin.\theta.\cos.\omega, \quad y = r.\sin.\theta.\sin.\omega, \quad z = r.\cos.\theta.$$

Ainsi lorsque l'équation d'une surface sera donnée, entre les coordonnées x, y, z, on en déduira l'équation de la même surface, entre les coordonnées r, θ, ω, en y substituant ces valeurs de x, y, z.

123. Menons dans le plan zOp, qui contient déjà le rayon Om, un second rayon Ok; soit $zOk = \theta'$; prenons $Ok = Om = r$, et décrivons du point O comme centre, l'arc de cercle mk. Prolongeons ensuite les rayons Om et Ok; soit $Om' = Ok' = r'$, et traçons l'arc de cercle $m'k'$, concentrique au premier. On aura $mk = r(\theta' - \theta)$ et $m'k' = r'(\theta' - \theta)$; et le quadrilatère $mm'kk'$ qui est la différence des deux secteurs $m'Ok'$ et mOk, sera égal à

$$\tfrac{1}{2}.(r'^2 - r^2).(\theta' - \theta).$$

Imaginons enfin que le plan zOp tourne autour de l'axe Oz, et que l'angle pOx devienne $qOx = \omega'$, de sorte qu'on ait $qOp = \omega' - \omega$. Dans ce mouvement, tous les points du quadrilatère $mm'k'k$ décrivent des arcs de cercle dont les centres sont dans l'axe Oz, et le quadrilatère engendre une portion de volume, telle que $mm'k'khh'n'n$. D'après le théorème de Guldin (n° 114), ce volume est égal au produit de l'aire génératrice, multipliée par l'arc de cercle que décrit le centre de gravité de cette aire; appelons donc u, la distance inconnue de ce centre à l'axe Oz; l'arc de cercle correspondant à

ce point, sera égal à $u(\omega'-\omega)$, et en le multipliant par la quantité $\frac{1}{2}.(r'^2-r^2).(\theta'-\theta)$, nous aurons

$$\frac{u}{2}.(r'+r).(r'-r).(\theta'-\theta).(\omega'-\omega),$$

pour l'expression du volume engendré.

Maintenant supposons que ce volume devienne infiniment petit dans ses trois dimensions, ou, ce qui est la même chose, que les trois différences $r'-r$, $\theta'-\theta$, $\omega'-\omega$, se changent dans les différentielles dr, $d\theta$, $d\omega$. Son expression deviendra d'abord

$$\frac{u(r'+r)}{2}.drd\theta d\omega;$$

et l'on devra négliger dans le facteur $\frac{u(r'+r)}{2}$, les termes dépendans de ces différentielles, c'est-à-dire, les termes infiniment petits. Or, le centre de gravité du quadrilatère $mm'k'k$ est un point compris dans son intérieur; lors donc que ses côtés deviennent infiniment petits, sa distance à l'axe Oz, ne peut différer que d'une quantité infiniment petite, de la distance du point m au même axe, ou de la perpendiculaire mf, abaissée du point m sur cet axe; et comme on a, dans le triangle mfO,

$$mf=mO.\sin.mOf=r.\sin.\theta,$$

il s'ensuit qu'on doit prendre $u=r.\sin.\theta$. On prendra en même tems $2r$, aulieu de $r'+r$; donc en négligeant ce qu'on doit négliger, on aura

$$\frac{u(r'+r)}{2}=r^2.\sin.\theta,$$

et le volume infiniment petit aura pour valeur

$$r^2.\sin.\theta.dr d\theta d\omega.$$

Telle est l'expression différentielle de l'élément du volume d'un corps qui répond aux trois coordonnées r, θ et ω; en la multipliant par la densité ρ de cet élément, et par la gravité g, on aura le poids du même élément; et le poids entier du corps sera égal à gM, en faisant, pour abréger,

$$M=\int\int\int\rho r^2.\sin\theta.dr d\theta d\omega.$$

Cette triple intégration suppose la quantité ρ donnée en fonction de r, θ et ω. Quant aux limites des intégrales, elles seront différentes selon que le point O, origine de ces coordonnées, sera situé dans l'intérieur ou à l'extérieur du corps. Pour fixer les idées, nous le supposerons situé dans son intérieur; et alors, afin d'y comprendre tous les élémens du corps, on devra prendre lés intégrales, 1°. depuis $r=0$, jusqu'à la valeur de r qui se rapporte à la surface du corps, et qui sera, en général, une fonction de θ et ω, donnée par l'équation de cette surface; 2°. depuis $\theta=0$, jusqu'à $\theta=200°$; 3°. depuis $\omega=0$, jusqu'à $\omega=400°$.

Si l'on faisait abstraction du facteur ρ, ces trois intégrations successives donneraient le volume du corps.

124. En conservant toujours $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, pour représenter les coordonnées du centre de gravité, parallèles aux axes Ox, Oy, Oz, et substituant dans les dernières formules du n°. 121, à la place de x,

y, z leurs valeurs en fonction de r, θ, ω (nº 122); et à la place de l'élément $dxdydz$ du volume, la nouvelle expression $r^2.\sin.\theta.drd\theta d\omega$ de ce même élément, ces formules deviendront

$$Mx_{,} = \int\!\!\int\!\!\int \rho r^3.\sin^2.\theta.\cos.\omega.drd\theta d\omega,$$
$$My_{,} = \int\!\!\int\!\!\int \rho r^3.\sin^2.\theta.\sin.\omega.drd\theta d\omega,$$
$$Mz_{,} = \int\!\!\int\!\!\int \rho r^3.\sin.\theta.\cos.\theta.drd\theta d\omega.$$

Les limites de ces intégrales seront les mêmes que celles qu'on vient d'indiquer pour la valeur de M.

125. Afin de montrer, par un exemple, l'usage de ces formules dans un cas où celles du nº 121 seraient difficilement applicables, je supposerai qu'on demande le centre de gravité du secteur sphérique engendré par le secteur circulaire AOB (fig. 34), tournant autour de l'axe Oz, et que ce corps soit composé de couches homogènes, concentriques, d'une épaisseur infiniment petite, et d'une densité variable en passant d'une couche à une autre. Dans ce cas, la quantité ρ est une fonction de la seule variable r, et elle est indépendante des deux autres variables θ et ω. De plus, si l'on représente par a, la rayon OA; par α, l'angle AOB, et par 2π, la circonférence entière, il faudra prendre les intégrales depuis $r=0$, jusqu'à $r=a$; depuis $\omega=0$, jusqu'à $\omega=2\pi$, et seulement, depuis $\theta=0$, jusqu'à $\theta=\alpha$. Intégrant donc dans ces limites, on trouve immédiatement

$$M=2\pi A(1-\cos.\alpha),\ Mx_{,}=0,\ My_{,}=0,\ Mz_{,}=\pi A'.\sin^2.\alpha,$$

en représentant par A et A', les valeurs des

intégrales $\int\rho r^2 dr$ et $\int\rho r^3 dr$, prises depuis $r=0$, jusqu'à $r=a$.

A cause de $x_{,}=0$ et $y_{,}=0$, nous voyons d'abord que le centre de gravité demandé se trouve sur l'axe Oz, ce qui résulte de la symétrie du corps autour de cet axe ; et quant à sa distance $z_{,}$ au point O, on a, en divisant la valeur de $Mz_{,}$ par celle de M,

$$z_{,}=\frac{A'.\sin^2.\alpha}{2A(1-\cos\alpha)}=\frac{A'(1+\cos.\alpha)}{2A}.$$

Si le corps est homogène, ρ est une quantité constante ; par conséquent

$$A=\int\rho r^2 dr=\frac{\rho a^3}{3}, \qquad A'=\int\rho r^3 dr=\frac{\rho a^4}{4};$$

d'où il suit

$$z_{,}=\frac{3a.(1+\cos.\alpha)}{8}.$$

Cette valeur de $z_{,}$ se construit en décrivant du centre O et d'un rayon $OC=\frac{3}{4}.OA$, un arc de cercle CD; abaissant du point D, où cet arc coupe le rayon OB, la perpendiculaire DE sur le rayon OA; prenant enfin le milieu G de EC, on aura, comme il est aisé de le voir, $OG=z_{,}$, et le point G sera le centre de gravité du secteur sphérique que l'on considère. C'est d'ailleurs ce qu'on peut démontrer directement ; car si l'on décompose la calotte sphérique qui lui sert de base, en élémens infiniment petits et égaux, et le secteur lui-même, en pyramides qui aient pour bases ces élémens, et leur sommet au point O, les centres de

gravité de toutes ces pyramides se trouveront à une distance du point O, égale aux trois quarts du rayon OA, qui est leur hauteur commune; de manière que le lieu de tous ces points sera une seconde calotte sphérique, concentrique à la première, et engendrée par l'arc CD, tournant autour de CO: le centre de gravité de cette surface sera celui du secteur sphérique; or, d'après ce qu'on a vu dans le n° 113, ce centre doit se trouver au milieu de la flèche CE,

CHAPITRE V.

DU FROTTEMENT.

126. Toutes les fois que des forces appliquées en différens points d'un corps solide, satisferont aux équations d'équilibre que nous avons précédemment trouvées, le corps restera en repos, pourvu que l'on ait eu soin de comprendre au nombre des forces données, le poids du corps considéré comme une force verticale, appliquée au centre de gravité. A la rigueur, cet équilibre devrait se rompre aussitôt que, par un changement quelconque dans les directions ou dans les intensités des forces, ces équations ont cessé de se vérifier; car non-seulement elles suffisent pour l'équilibre, mais encore elles sont nécessaires, ainsi que nous l'avons démontré. Mais quand il s'agit d'un corps posé sur un plan fixe, ou gêné par quelqu'autre obstacle fixe, une circonstance physique, dont nous avons fait abstraction jusqu'à présent, s'oppose à ce que cette ruption instantanée d'équilibre ait effectivement lieu dans la nature. Je veux parler ici du *frottement* du corps contre l'obstacle fixe, que l'on doit regarder comme une force *passive*, incapable de produire le mouvement par elle-même, et seulement capable de détruire le mouvement communiqué par d'autres forces.

On conçoit qu'il est indispensable d'avoir égard à cette force, lorsqu'on veut appliquer les lois générales de l'équilibre à des questions particulières; mais on ne doit pas s'attendre à trouver, dans ce Traité, de grands développemens sur une matière qui appartient plutôt à la pratique qu'à la théorie de la mécanique. Je me bornerai donc à faire connaître, d'une manière succincte, ce que l'expérience a appris de plus certain sur la mesure du frottement, et à montrer, par un exemple, comment on doit tenir compte de cette force dans la recherche des conditions d'équilibre.

127. Considérons un corps pesant posé sur un plan horizontal. Ce corps restera en repos, et il exercera sur le plan une pression égale à son poids, que je désignerai par P. Dans cette situation, le frottement ne contribue en rien à l'équilibre; mais supposons que l'on incline le plan donné sur le plan horizontal, et soit α, l'angle BAC (fig. 23), formé par ces deux plans; le poids P, appliqué au centre de gravité G du corps, se décomposera en deux forces, l'une perpendiculaire au plan incliné et dirigée suivant GE, l'autre parallèle à ce plan et dirigée suivant GH. Les composantes seront exprimées par $P.\cos.EGF$, et $P.\cos.HGF$, la ligne GF étant la direction verticale du poids P; et à cause que les angles EGF et HGF sont complémens l'un de l'autre, et qu'on a évidemment $EGF=BAC=\alpha$, ces deux forces seront égales à $P.\cos.\alpha$ et $P.\sin.\alpha$. La première exprimera la pression que supporte le

plan incliné; quant à la seconde, il est évident que, sans le frottement, elle ferait glisser le corps le long de ce plan; par conséquent, si le corps continue de rester en repos, il en faudra conclure qu'il existe un frottement capable de détruire la force $P.\sin.\alpha$.

Si nous continuons d'incliner de plus en plus le plan donné sur le plan horizontal, ou si nous augmentons l'angle α, la force $P.\sin.\alpha$ augmentera en même tems, et au contraire, la pression $P.\cos.\alpha$ et le frottement du corps contre ce plan, diminueront; car, sans connaître le rapport du frottement à la pression, on ne peut cependant pas douter que le frottement ne doive diminuer quand la pression diminue. La composante du poids P, parallèle au plan incliné, finira donc par vaincre le frottement, et par mettre le corps en mouvement; or, si l'on fait croître l'angle α assez lentement pour qu'on puisse saisir avec exactitude l'instant où l'équilibre commence à se rompre, et si l'on désigne par ε la valeur de α, qui répond à cet instant, il est clair que la force $P.\sin.\varepsilon$ donnera au même instant la mesure du frottement du corps contre le plan incliné. Soit donc f le rapport de ce frottement à la pression, qui est égale à $P.\cos.\varepsilon$, à l'instant dont nous parlons; nous aurons

$$f.P.\cos.\varepsilon = P.\sin.\varepsilon;$$

d'où l'on tire $f = \text{tang}.\varepsilon$.

Ainsi la tangente du plus grand angle, pour lequel un corps pesant posé sur un plan incliné, puisse

s'y tenir en équilibre, ou, si l'on veut, la tangente du plus petit angle pour lequel il commence à glisser le long de ce plan, exprime le rapport du frottement à la pression que supporte ce même plan.

128. C'est d'après ce théorème que l'on détermine par l'expérience, la mesure du frottement des différentes espèces de corps solides, les uns contre les autres. On a constaté de cette manière les résultats suivans :

1°. Le frottement est d'autant plus faible, que les surfaces frottantes sont mieux polies.

2°. Il est plus grand, toutes choses d'ailleurs égales, entre des corps de même matière qu'entre des corps de matières différentes.

3°. Les surfaces frottantes restant les mêmes, il augmente ou diminue dans le même rapport que la pression, c'est-à-dire, que l'on trouve l'angle ϵ du n° précédent, indépendant du poids du corps que l'on soumet à l'expérience.

4°. Enfin, ce poids ne changeant pas, l'étendue de la surface frottante n'a aucune influence sur le frottement. Ainsi, par exemple, un polyèdre dont toutes les faces sont également polies, éprouve toujours le même frottement, quelle que soit la face sur laquelle il est posé; ensorte que l'angle ϵ reste le même, quand on pose ce corps successivement sur différentes faces.

129. De ces deux derniers résultats, on peut conclure que si plusieurs corps pesans sont posés sur un

un même plan incliné, le plus petit angle pour lequel ils commenceront à glisser sur ce plan, sera le même pour tous ces corps, quoique leurs poids et l'étendue de leurs surfaces de contact soient différens, pourvu seulement que ces surfaces soient toutes également polies. En effet, appelons A et B deux de ces corps, et considérons un troisième corps C, qui ait le même poids que A et une surface frottante, de même étendue que celle de B; d'après le troisième résultat, l'angle ϵ sera le même pour les deux corps B et C, et en vertu du quatrième, cet angle sera aussi le même pour A et C; donc les deux corps A et B commenceront à glisser pour le même angle d'inclinaison, et il en sera de même de tous les corps posés sur le plan incliné.

130. Maintenant examinons comment les conditions d'équilibre dans le levier, se trouvent modifiées par le frottement.

Il ne sera pas question ici d'un levier géométrique, qui consiste en une ligne retenue par un point fixe (n° 57), mais bien d'un levier physique que nous supposerons formé par une barre inflexible, percée d'un trou cylindrique, au travers duquel on fait passer un axe fixe. Nous supposerons aussi que cet axe est un cylindre d'un diamètre à très-peu-près égal à celui du trou; de sorte que les sections du trou et de l'axe fixe, faites par un plan perpendiculaire à l'axe, sont des cercles dont les rayons diffèrent très-peu l'un de l'autre. Ces deux cercles se touchent en un point, lorsque la barre s'appuie

sur l'axe fixe en vertu des forces qui lui sont appliquées ; le contact physique a sensiblement lieu dans une petite étendue, de part et d'autre de ce point, et dans cette étendue, la barre éprouve un frottement contre la surface du cylindre fixe, suivant toute la longueur de cette surface ; or, il s'agit de déterminer dans quelles limites ce frottement peut empêcher la barre de tourner autour du cylindre, quoique les forces qui la sollicitent ne se fassent pas équilibre. Afin que ce frottement ne dépende pas de la position du point de contact, nous regarderons les surfaces frottantes comme également polies dans toute leur étendue.

Cela posé, soit $EFGH$ (fig. 35) une section du levier par un plan perpendiculaire à l'axe fixe ; anb et $a'nb'$, les sections circulaires de l'axe et du trou, faites par ce plan ; n leur point de contact, et C le centre de la première. Appliquons à ce levier, des forces P, P', P'', etc., agissant aux points m, m', m'', etc., suivant les directions mA, mA', mA'', etc., qui sont toutes comprises dans le plan de la section $EFGH$. Calculons les momens de ces forces P, P', P'', etc., par rapport au point C, en observant que, dans ce calcul, on peut, sans erreur sensible, prendre le point C pour le centre du cercle $a'nb'$, vu le peu de différence qu'on suppose entre les rayons de $a'nb'$ et de anb. Si nous trouvons la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner le levier dans un sens, égale à la somme de ceux qui tendent à le faire tourner dans le sens opposé, il en faudra conclure que la résultante passe par le point C (n° 57);

par conséquent elle coupera le cylindre fixe, perpendiculairement à sa surface, et l'équilibre existera sans que le frottement y contribue. Mais si, au contraire, l'une des deux sommes l'emporte sur l'autre, le levier tendra à tourner dans le sens des forces qui auront donné la plus grande somme, et il n'y aura que le frottement qui puisse empêcher ce mouvement d'avoir lieu.

Pour fixer les idées, supposons que le levier tende à tourner dans le sens de la force P qui agit suivant la direction mA, désignons par L, la différence des deux sommes de momens, et imaginons que cette différence augmente de plus en plus, jusqu'à ce que l'équilibre soit sur le point de se rompre, si, toutefois, cette ruption n'est pas impossible ; à cette limite, les forces données P, P', P'', etc., sont encore tenues en équilibre par le frottement, qu'on doit considérer comme une force tangente au cylindre fixe, appliquée au point de contact n, et agissant suivant la direction nB, c'est-à-dire, tendant à faire tourner le levier en sens contraire de la force P. En appelant donc F, cette force, et la joignant aux forces données, il faudra que la résultante de F, P, P', P'', etc., soit perpendiculaire à la surface du cylindre fixe, ou, ce qui revient au même, il faudra qu'elle passe par le point C; ce qui exige que le moment de F, pris par rapport à ce point, soit égal à L.

Ainsi, nous aurons $L = Fh$, h étant le rayon du cercle anb, ou la perpendiculaire abaissée du centre C sur la tangente nB. De plus, la pression que sup-

porte la surface du cylindre fixe, et qui s'exerce au point de contact n, suivant la normale nC, sera la résultante de toutes les forces F, P, P', P'', etc. : nous la désignerons par Q, et comme nous savons que le frottement est proportionnel à la pression (n° 128), nous aurons $F=f.Q$, f étant un coefficient donné et indépendant des forces P, P', P'', etc., appliquées au levier. Substituant cette valeur dans celle de L, il vient

$$L=fh.Q; \qquad (1)$$

mais on ne peut rien conclure de cette équation, sans avoir auparavant déterminé la valeur de Q.

131. Menons donc arbitrairement dans le plan qui contient toutes les forces Q, F, P, P', P'', etc., deux axes rectangulaires, tels que Cx et Cy; soient α, α', α'', etc., les angles donnés que font les directions de P, P', P'', etc. avec l'axe Cx; 6, $6'$, $6''$, etc., les angles aussi donnés que font ces mêmes directions avec l'axe Cy; a et b, les angles inconnus qui se rapportent à la direction nC de la force Q, et qui sont les supplémens des angles nCx et nCy; enfin a' et b', les angles relatifs à la direction nB de la force F. Puisque Q est la résultante de F, P, P', P'', etc., nous aurons

$$Q.\cos.a = F.\cos.a' + P.\cos.\alpha + P'.\cos.\alpha' + \text{etc.},$$
$$Q.\cos.b = F.\cos.b' + P.\cos.6 + P'.\cos.6' + \text{etc.}$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$P.\cos.\alpha + P'.\cos.\alpha' + \text{etc.} = X,$$
$$P.\cos.6 + P'.\cos.6' + \text{etc.} = Y;$$

on aura

$$Q.\cos.a - F.\cos.a' = X, \quad Q.\cos.b - F.\cos.b' = Y;$$

et si l'on appelle R la résultante des forces P, P', P'', etc., on aura aussi

$$R^2 = X^2 + Y^2;$$

d'où l'on conclut, en employant pour F, sa valeur fQ,

$$R^2 = Q^2.[(\cos.a - f.\cos.a')^2 + (\cos.b - f.\cos.b')^2].$$

Mais on a (n° 9)

$$\cos^2.a + \cos^2.b = 1, \quad \cos^2.a' + \cos^2.b' = 1;$$

d'ailleurs les directions nB et nC du frottement F et de la pression Q, étant perpendiculaires l'une à l'autre, on a en outre (n° 78)

$$\cos.a.\cos.a' + \cos.b.\cos.b' = 0;$$

donc en vertu de ces équations, la valeur de R^2 se réduit à

$$R^2 = Q^2.(1 + f^2);$$

ce qui donne

$$Q = \frac{R}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Or, en représentant par r, la perpendiculaire abaissée du point C sur la direction de R, nous aurons, d'après le théorème du n° 55, $L = Rr$; substituant ces valeurs de L et Q dans l'équation (1), elle devient

$$r = \frac{fh}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Ce résultat nous apprend que la limite où l'équilibre commence à se rompre, dépend uniquement de la distance de la résultante des forces données, au point C : tant que cette distance est plus petite que $\frac{fh}{\sqrt{1+f^2}}$, les forces données, ou leur résultante, sont tenues en équilibre par le frottement ; aussitôt que la même distance dépasse cette limite, les forces données l'emportent sur le frottement, et l'équilibre est rompu.

La valeur de Q fait connaître la pression que supporte l'axe fixe ; et l'on voit qu'à raison du dénominateur $\sqrt{1+f^2}$, le frottement contribue toujours à la diminuer. Si l'on voulait savoir en quel point cette pression s'exerce, il faudrait déterminer, au moyen des équations précédentes, les valeurs des angles a et b : leurs supplémens sont les angles nCx et nCy, relatifs à la direction du rayon Cn qui aboutit au point de contact n, et c'est en ce point que le levier s'appuie sur le cylindre fixe.

132. La quantité f varie avec la matière du levier et de l'axe fixe, le degré de poli et l'étendue des surfaces frottantes. Sa valeur peut être aussi grande que l'on voudra; mais la fraction $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$, sera toujours plus petite que l'unité; d'où il suit que quand l'équilibre existe, la distance r de la résultante R au point C, est toujours plus petite que le rayon h du cylindre fixe. Ainsi cette force ne peut être tenue en équilibre par le frottement du levier contre le cylindre fixe, qu'autant que sa direction vient

couper ce cylindre; et toutes les fois que cette condition ne sera pas remplie, on pourra assurer, sans examiner si le frottement est plus ou moins considérable, que l'équilibre est impossible. Mais on ne doit pas perdre de vue que ce résultat est subordonné à l'hypothèse dont nous sommes partis, savoir, que le levier et le cylindre fixe ne se touchent qu'en un seul point, ou du moins, dans une très-petite étendue : il ne serait plus vrai, si le levier touchait le cylindre et frottait contre sa surface en plusieurs endroits à la fois.

CHAPITRE VI.

DE L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS FLEXIBLE.

135. Si l'on considère un assemblage de points, liés entre eux d'une manière quelconque et sollicités par des forces données, et que l'équilibre ait lieu dans ce système, il est évident que cet état ne sera pas troublé, en joignant tous ces points les uns aux autres par des droites inflexibles, de manière à changer le corps que l'on considère, en un corps solide. Les conditions d'équilibre relatives à un système de forme invariable, doivent donc se retrouver parmi celles de tous les systèmes. Ainsi, les six équations du n° 60 sont nécessaires pour l'équilibre de tout corps qui ne renferme aucun point fixe, ni aucun point astreint à rester sur une surface ou sur une courbe fixe, quelle que soit d'ailleurs la liaison mutuelle des parties de ce corps. S'il renferme un point fixe, les équations (3), (5) et (6) de ce n°, seront seules nécessaires; s'il en contient deux, une seule de ces trois équations continuera de subsister: car alors, en joignant les points du corps par des droites inflexibles, celle qui joint les deux points fixes, deviendra un axe fixe, autour duquel le corps, devenu solide, sera forcé de tourner, et dans ce cas nous savons (n° 65) qu'il n'existe plus qu'une

seule équation d'équilibre. Enfin, lorsque le système contiendra trois ou un plus grand nombre de points fixes, qui ne seront pas rangés sur une même droite, nos six équations deviendront inutiles, et la considération du corps solide ne fera connaître, dans un pareil cas, aucune des équations d'équilibre du système proposé; et effectivement, trois points fixes, non en lignes droites, suffisent pour rendre un corps solide, tout-à-fait immobile; de sorte que les forces qui lui sont appliquées, sont détruites, sans qu'il en résulte aucune équation de condition.

Mais outre ces équations d'équilibre, communes à tous les systèmes, et qui suffisent pour les corps solides, il en existe d'autres, qui dépendent du mode de liaison des points où les forces sont appliquées, et dont le nombre augmente à mesure que ces points sont plus indépendans les uns des autres. C'est la recherche de ces équations particulières, qui va nous occuper dans ce chapitre.

§. I. *Équilibre du Polygone funiculaire; équation de la Chaînette.*

134. On appelle, en général, *machine funiculaire*, tout assemblage de cordes liées entre elles par des nœuds fixes, ou simplement passées dans des anneaux qui peuvent couler le long des cordes. Le nombre des cordons qui viennent aboutir à un même nœud, peut être quelconque; mais pour simplifier

la question, nous supposerons que chaque nœud n'assemble jamais que trois cordons, et en premier lieu, nous exclurons les anneaux mobiles.

Prenons donc une corde parfaitement flexible et inextensible, d'une longueur quelconque et dont K et K' (fig. 36) soient les deux points extrêmes. Soient m, m', m'', etc., différens autres points de cette corde; attachons à ces points des cordons mh, $m'h'$, $m''h''$, etc., suivant lesquels agiront des forces données P, P', P'', etc.; appliquons aussi au point m, une force donnée A, agissant dans la direction du cordon Km, et au dernier des points m, m', m'', etc., une autre force donnée A', dirigée vers le point K'. Dans l'état d'équilibre, la corde inextensible formera un certain polygone, que nous appellerons spécialement *le polygone funiculaire*, et dont les sommets seront les points ou nœuds $K, m, m', m'', \ldots K'$. Il s'agit de trouver les conditions que les forces données $A, P, P', P'', \ldots A'$, doivent remplir pour que cet équilibre soit possible, et de déterminer la figure du polygone qui convient à cet état.

Pour découvrir ces conditions, je pars de ce principe évident, que si l'équilibre existe, chacun des cordons mm', $m'm''$, $m''m'''$, etc., doit être tiré à ses deux extrémités, par des forces égales, dirigées suivant ses prolongemens.

Il s'ensuit d'abord, que la résultante des deux forces A et P, appliquées au point m, doit coïncider avec le prolongement mf, du cordon mm'. On

peut donc (n° 28) transporter le point d'application de cette force, au point m' situé sur sa direction; en la composant ensuite avec la force P', appliquée au même point suivant la direction $m'h'$, il faudra que cette seconde résultante, qui sera celle des trois forces A, P, P', coïncide avec le prolongement $m'f'$, du cordon $m'm''$: donc il est permis de transporter son point d'application, au point m'' qui se trouve sur sa direction. Je prends encore la résultante de cette force et de la force P'' appliquée au même point m''; j'ai de cette manière la force qui tire le cordon $m''m'''$ à son extrémité m'', et qui doit être dirigée suivant son prolongement $m''f''$. Cette force est, comme on voit, la résultante des quatre forces A, P, P', P''; un raisonnement semblable prouverait que la force qui tire le même cordon à son extrémité m''', et qui doit coïncider avec l'autre prolongement $m''f'''$, de ce cordon, est la résultante des forces P''', P^{iv},.... A' : ces deux résultantes sont donc égales et directement opposées, et par conséquent la résultante de toutes les forces données A, P, P', P'', P''',.... A', est égale à zéro. On parviendrait évidemment au même résultat, en considérant les forces qui agissent aux extrémités de tout autre cordon.

Ainsi, les forces appliquées au polygone funiculaire, doivent être telles, qu'en les transportant en un même point parallèlement à elles-mêmes, elles s'y fassent équilibre; ce qui donne, comme on sait, trois équations entre ces forces et les angles que

font leurs directions avec trois axes rectangulaires, menés par ce point. Ces équations sont (n° 22)

$$\left.\begin{array}{l} A.\cos.a+A'.\cos.a'+P.\cos.\alpha+P'.\cos.\alpha'+P''.\cos.\alpha''+\text{etc.}=0, \\ A.\cos.b+A'.\cos.b'+P.\cos.\beta+P'.\cos.\beta'+P''.\cos.\beta''+\text{etc.}=0, \\ A.\cos.c+A'.\cos.c'+P.\cos.\gamma+P'.\cos.\gamma'+P''.\cos.\gamma''+\text{etc.}=0; \end{array}\right\} (a)$$

a, a', α, α', α'', etc., désignant les angles relatifs à l'un des axes; b, b'; β, β', β'', etc., les angles relatifs à un second axe; c, c', γ, γ', γ'', etc., ceux qui se rapportent au troisième.

135. Lorsque les forces A, P, P', P'', ... A', et les directions des cordons par lesquelles elles agissent, ne satisferont pas à ces équations, il sera impossible qu'elles se fassent équilibre au moyen du polygone funiculaire, quelque figure que l'on donne à ce polygone. Mais toutes les fois que ces équations seront satisfaites, on pourra donner au polygone une figure telle, que l'équilibre ait lieu. Les grandeurs et les directions des forces A, P, P', P'', ...A', étant données, cette figure est déterminée, et sa construction résulte de la suite de compositions de forces que nous venons d'indiquer.

En effet, connaissant les directions des cordons Km et hm suivant lesquels agissent A et P, il m'est facile de déterminer la grandeur et la direction de leur résultante. Sur le prolongement de cette direction, à partir du point m, je porte la longueur donnée du cordon mm'; cela fait, j'applique au point m', la résultante de A et P, sur la ligne mm', et

la force P' dans la direction donnée du cordon $m'h'$; je prends la résultante de ces deux forces: sa direction me fait connaître celle du cordon $m'm''$, et je porte sur le prolongement de cette direction, la longueur donnée de ce cordon. Maintenant je fais au point m'', une construction semblable à celle que je viens d'indiquer pour le point m' : j'applique en m'', la dernière résultante, sur le côté $m'm''$, et la force P'', dans la direction donnée du cordon $m''h''$; je compose ensuite ces deux forces en une seule, et c'est sur le prolongement de celle-ci que je porte la longueur donnée du cordon $m''m'''$.

Je continue ainsi jusqu'à ce que je sois parvenu au dernier des nœuds m, m', m'', etc., qui sera, je suppose, le nœud m^{v}, de sorte que $m^{v}K'$ sera le dernier côté du polygone. Sa direction est connue, puisqu'elle représente celle de la force A', et que l'on regarde comme données, les directions de toutes les forces A, P, P', P'', P''', P^{iv}, P^{v}, A'; il faudra donc que la direction prolongée de la résultante des deux forces appliquées au point m^{v}, suivant le côté $m^{iv}m^{v}$, et suivant le cordon $m^{v}h^{v}$, coïncide avec la direction donnée du côté $m^{v}K'$. C'est en effet ce qui arrivera toujours; car d'après notre construction, la force dirigée suivant $m^{iv}m^{v}$ n'est autre chose que la résultante des six forces A, P, P', P'', P''', P^{iv}, transportées au point m^{v} parallèlement à leurs directions : en la composant avec la force P^{v} dirigée suivant $m^{v}h^{v}$, on aura la résultante de toutes les forces données, moins la force A'; or, en vertu des équations (a), qu'on suppose satis-

faites, cette résultante est égale et directement opposée à la force A' (n° 22); donc la direction prolongée de cette résultante, coïncidera avec la direction donnée du cordon $m''K'$.

136. Si l'on mène par le point K, les trois axes auxquels se rapportent les angles a, a', α, etc.; b, b', ϵ, etc.; c, c', γ, etc.; et si l'on considère les coordonnées parallèles à ces axes, des sommets m, m', m'', etc. du polygone funiculaire, il est évident que ces coordonnées seront des fonctions déterminées des valeurs de ces angles, des intensités des forces A, P, P',...A', et des longueurs des côtés mm', $m'm''$, etc. On pourrait calculer, en fonction de ces quantités, les trois coordonnées d'un sommet quelconque. Les formules générales que l'on trouverait de cette manière, serviraient, dans chaque cas particulier, à construire directement tous les sommets du polygone, ou seulement un ou plusieurs de ces points. Mais nous croyons plus simple de construire les différens côtés de ce polygone successivement et les uns au moyen des autres, ainsi que nous venons de l'indiquer; et nous nous dispenserons de rapporter les valeurs des coordonnées de ces sommets, qui ne nous seraient d'aucun usage, et dont l'expression générale est extrêmement compliquée.

137. Quand les forces données remplissent les conditions exprimées par les équations (a), et que l'on a donné au polygone la figure propre à l'équilibre, on peut être assuré que cet état existe. Alors chacun des cordons mm', $m'm''$, $m''m'''$, etc., se trouve

tiré dans le sens de sa longueur, par deux forces égales et contraires, appliquées à ses extrémités : l'intensité commune de ces deux forces exprime la *tension* que le cordon éprouve ; il est donc important, dans la pratique, de calculer cette tension, et de s'assurer par l'expérience, qu'elle ne dépasse pas celle qu'un cordon du même diamètre et de la même matière, peut supporter sans se rompre.

Or, d'après ce qu'on vient de voir (n° 134), la tension des différens côtés du polygone, variera d'un côté à l'autre : la tension du côté mm' sera égale à la résultante des forces A et P, ou à celle des forces P', P'', P''',.... A' ; celle du côté $m'm''$ sera égale à la résultante de A, P et P', ou à celle de P'', P''', ... A' ; et ainsi de suite. Il sera donc aisé dans chaque cas particulier, de déterminer les tensions qu'éprouvent tous les côtés du polygone, lorsque les grandeurs et les directions des forces A, P, P', P'',.... A' seront données.

138. Si les points extrêmes K et K' du polygone sont fixes, il est évident que les forces A et A' représenteront à-la-fois les tensions des cordons qui aboutissent à ces points, et les pressions que ces points éprouvent. Dans ce cas, les valeurs de A et A', et des angles a, b, c, a', b', c', qui déterminent les directions des côtés extrêmes du polygone, ne seront plus données ; mais on aura huit équations pour déterminer ces huit inconnues, savoir, les équations (a), les équations (n° 8)

$$\cos^2.a+\cos^2.b+\cos^2.c=1, \quad \cos^2.a'+\cos^2.b'+\cos^2.c'=1;$$

et trois nouvelles équations résultant de ce que la position des points fixes K et K' est donnée. En effet, les valeurs des coordonnées du point K', parallèles aux axes menés par le point K, seront données; égalant donc ces valeurs aux expressions des coordonnées de K', calculées comme on vient de l'indiquer (n° 136), il en résultera les trois équations dont nous parlons.

On formera sans peine ces trois équations, dans les cas particuliers où le nombre des côtés du polygone sera peu considérable. Je crois inutile d'en donner ici aucun exemple; seulement je ferai remarquer que quelles que soient les intensités et les directions des forces qui agissent sur un polygone funiculaire, attaché à deux points fixes, l'équilibre est toujours possible, puisqu'alors on a autant de quantités indéterminées A, A', a, b, c, a', b', c', que d'équations de conditions à satisfaire; en sorte qu'il ne reste aucune équation entre les forces données, et les angles qui déterminent leurs directions.

139. Soit que les points extrêmes du polygone soient fixes, ou qu'ils soient libres, si l'un ou plusieurs des nœuds m, m', m'', etc. sont remplacés par des anneaux mobiles, cette circonstance donnera lieu à de nouvelles conditions d'équilibre. Supposons, par exemple, que m'' soit un anneau mobile, qui puisse glisser le long du cordon $m'm''m'''$; il est clair que dans ce mouvement la somme des distances $m'm''$ et $m''m'''$, du point m'' aux points m' et m''', restera constante; or, si l'équilibre existe, cet état ne

ne sera pas troublé en rendant fixes ces deux derniers points; mais alors le point m'' sera évidemment dans le même cas que s'il était astreint à rester sur la surface d'un ellipsoïde de révolution, dont m' et m''' sont les deux foyers, et dont le grand axe est égal à la longueur donnée du cordon $m'm''m'''$: donc ce point ne peut rester en équilibre (n° 23), à moins que la force P'' qui lui est appliquée, ne soit perpendiculaire à cette surface; d'où il suit, d'après une propriété connue de l'ellipse, que la direction de cette force doit couper en deux parties égales l'angle des deux rayons vecteurs $m'm''$ et $m''m'''$.

Lors donc qu'en exécutant la construction du n° 135, on sera parvenu à un anneau mobile, tel que m'', et que l'on aura pris la résultante des deux forces dirigées suivant $m''m'$ et $m''h''$, ce qui fera connaître la direction du cordon $m''m'''$; si l'on trouve que les angles $h''m''m'$ et $h''m''m'''$ ne sont pas égaux entre eux, il en faudra conclure que l'équilibre n'existe pas. En général, il faudra que la direction du cordon $h''m''$, attaché à l'anneau mobile m'', ne soit pas donnée d'avance, afin qu'on puisse, en la déterminant d'une manière convenable, remplir la condition de l'égalité des deux angles $h''m''m'$ et $h''m''m'''$.

On peut observer que dans l'état d'équilibre, les tensions des cordons adjacens à un anneau mobile seront égales entre elles. Cela résulte, comme il est facile de le voir, de ce que ces deux cordons font des angles égaux avec la force appliquée à cet anneau; et d'ailleurs cette égalité de tension est évi-

dente en elle-même, puisque dans ce cas, les deux cordons n'en forment plus qu'un seul, qui doit nécessairement éprouver la même tension dans toute son étendue.

140. Ce que nous disons, relativement à un anneau obligé de glisser le long d'un fil inextensible, peut s'étendre à tous les points d'un système en équilibre, quelle que soit la liaison de ces points entre eux. On ne troublera pas cet équilibre en fixant tous les points du système, excepté un seul : or, si la liaison de ce point avec les autres est telle qu'il puisse encore décrire une surface ou seulement une ligne courbe, autour de ces points fixes, il est évident que le point mobile sera dans le même cas que si la surface ou la ligne courbe existait réellement; par conséquent la direction de la force qui lui est appliquée, doit être normale à cette surface ou à cette ligne.

Concluons donc que *dans tout système en équilibre, la force appliquée à chaque point du système, est perpendiculaire à la surface ou à la courbe sur laquelle ce point serait obligé de rester, si tous les autres points auxquels il est lié, étaient regardés pour un moment comme des points fixes.*

Quand cette condition relative à la direction des forces et à la liaison des parties du système n'est pas remplie, on peut être certain que l'équilibre n'existe pas; mais elle ne suffit pas, à elle seule, pour assurer l'équilibre du système.

141. Considérons maintenant le cas particulier où

toutes les forces P, P', P'', etc., appliquées au polygone funiculaire, sont des poids, et où les deux points extrêmes K et K' sont supposés fixes. Pour plus de simplicité, supposons aussi qu'il ne se trouve aucun anneau mobile parmi les nœuds m, m', m'', etc.

Dans ce cas, l'équilibre est toujours possible (n° 138); et pour déterminer la figure du polygone qui convient à cet état, j'observe d'abord que tous ses côtés seront dans un même plan, savoir, dans le plan vertical mené par les deux points donnés K et K' (fig. 37). C'est ce qu'il est facile de conclure de la construction du n° 135; car, d'après cette construction, les trois cordons qui aboutissent à chacun des nœuds m, m', m'', etc., sont dans un même plan; or, ici le plan des cordons Km, hm et mm', est vertical, puisqu'il renferme la ligne verticale hm, direction du poids P; le plan des cordons mm', $h'm'$ et $m'm''$ est de même vertical, à cause de la verticale $h'm'$, direction du poids P' : ces deux plans verticaux ayant une ligne mm' commune, coïncident nécessairement; donc les trois côtés Km, mm' et $m'm''$ sont dans un même plan vertical. On prouvera de même que tous les autres côtés du polygone sont contenus dans ce plan.

Cela posé, je mène dans ce plan et par le point K, les deux axes Kx et Ky, auxquels se rapportent les angles $a, \alpha, \alpha', \alpha'', \ldots a'$; $b, 6, 6', 6'', \ldots b'$, du n° 134; alors tous les angles $c, \gamma, \gamma', \gamma'', \ldots c'$, sont droits; et si nous prenons l'axe Ox horizontal, et l'axe Oy vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur, les angles α, α', α'', etc., seront aussi droits,

et les angles $\mathit{6}$, $\mathit{6}'$, $\mathit{6}''$, etc., seront nuls. Les équations du n° cité se réduisent donc à deux, savoir :

$$\left. \begin{array}{l} A.\cos.a + A'.\cos.a' = 0, \\ A.\cos.b + A'.\cos.b' + \Pi = 0, \end{array} \right\} \quad (b)$$

Π désignant la somme des poids P, P', P'', etc.

Soit aussi T la tension d'un côté quelconque du polygone. Si nous considérons cette force comme appliquée à l'extrémité de ce côté, la plus voisine du point K ; que nous représentions par u, l'angle que fait sa direction avec l'axe horizontal ; par v, celui que cette direction fait avec l'axe vertical ; par p, la somme des poids suspendus au polygone, depuis le point K jusqu'à cette première extrémité inclusivement : la force T sera la résultante de la force A et du poids p (n° 137) ; par conséquent on aura

$$T.\cos.u = A.\cos.a,$$
$$T.\cos.v = A.\cos.b + p.$$

Si au contraire on regardait la force T comme appliquée à l'autre extrémité du côté dont elle exprime la tension, sa direction serait opposée à celle qu'elle avait d'abord ; de sorte qu'il faudrait remplacer les angles u et v par leurs supplémens (n° 7); mais alors elle serait la résultante de la force A' et du poids $\Pi - p$, et l'on aurait

$$-T.\cos.u = A'.\cos.a',$$
$$-T.\cos.v = A'.\cos.b' + \Pi - p;$$

résultat qui s'accorde avec le premier, en vertu des équations (b).

Au moyen de ces valeurs de $T.\cos.u$ et $T.\cos.v$, on déterminera immédiatement la tension et la direction de chaque côté du polygone, quand les valeurs des inconnues A, A', a, a', b, b', auront été calculées, comme il a été dit précédemment (n° 138).

142. C'est un problème curieux de déterminer la courbe que forme, dans l'état d'équilibre, une *chaîne* pesante et parfaitement flexible, suspendue à deux points fixes par ses extrémités. On nomme cette courbe la *chaînette*. Il nous est facile actuellement d'en trouver l'équation, en observant que tout ce qui a été dit dans le n° précédent, étant indépendant du nombre et de la grandeur des côtés du polygone, doit encore subsister quand ce nombre devient infini et cette grandeur infiniment petite.

Décomposons donc la chaîne pesante, suspendue aux deux points fixes K et K' (fig. 38), en une infinité de parties, et regardons P, P', P'', etc., comme les poids de ses élémens; p sera le poids d'une portion de la chaîne, commençant au point K et finissant au point quelconque n; et si nous supposons la chaîne homogène et d'une égale épaisseur dans toute son étendue, ce poids sera proportionnel à la longueur de cette portion de chaîne; de sorte que nous aurons $p=hs$, s représentant l'arc de courbe Kn, et h un coefficient constant. Ce coefficient exprime dans chaque cas particulier, le poids donné d'une portion de la chaîne, d'une longueur égale à l'unité.

D'après cette décomposition, la chaînette se trouve

remplacée par un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits. Celui qui se trouve à l'extrémité de l'arc s, éprouve la tension T, qui s'exerce suivant le prolongement de ce côté, lequel prolongement n'est autre chose que la tangente à la courbe au point n. Ainsi les valeurs de $T.\cos.u$ et $T.\cos.v$, du n° précédent, nous feront connaître la direction de cette tangente et la tension qui a lieu à l'extrémité de l'arc s. Si donc nous prenons dans le plan de la chaînette, l'axe horizontal Kx, pour celui des abscisses, et l'axe vertical Ky, pour celui des ordonnées; que nous représentions par x et y, l'abscisse et l'ordonnée du point n, et que nous supposions la ligne nt, tangente à la courbe au point n, le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ exprimera, comme on sait, la tangente de l'angle Ktn; mais à cause que cette ligne nt représente la direction de la force T, qui est déterminée par les angles u et v, cette tangente est aussi égale au rapport $\frac{\cos.v}{\cos.u}$; or, les valeurs de $T.\cos.v$ et $T.\cos.u$ donnent, en y substituant hs à la place de p, et divisant l'une par l'autre,

$$\frac{\cos.v}{\cos.u}=\frac{A.\cos.b+hs}{A.\cos.a};$$

on aura donc

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos.v}{\cos.u}=\frac{A.\cos.b+hs}{A.\cos.a};$$

d'où l'on tire

$$A.\cos.a.dy-A.\cos.b.dx=hs.dx.$$

Soit $K\alpha$, la tangente au point K, et faisons $xK\alpha = c$, $yK\alpha = 100° - c$; nous aurons $\cos.a = -\cos.c$, $\cos.b = -\sin.c$; car la force A est dirigée suivant le premier côté infiniment petit de la courbe ou suivant sa première tangente, et elle agit dans le sens du prolongement $K\alpha'$ de cette tangente ; de sorte que les angles a et b, qui déterminent sa direction par rapport aux axes Kx et Ky, sont $xK\alpha'$ et $yK\alpha'$, supplémens de $xK\alpha$ et $yK\alpha$; d'où il suit que $\cos.a$ et $\cos.b$ sont égaux et de signes contraires à $\cos.c$ et $\sin.c$. Employant donc l'angle c, au lieu des angles a et b, l'équation précédente deviendra

$$A.\sin.c.dx - A.\cos.c.dy = hs.dx. \quad (1)$$

C'est l'équation de la chaînette que nous nous proposions de trouver. A et c sont des constantes inconnues, dont nous allons bientôt déterminer les valeurs.

143. La tension T en un point quelconque n de cette courbe, sera donnée par l'équation

$$T^2 = A^2 - 2Ahs.\sin.c + h^2s^2$$

que l'on obtient en ajoutant les carrés des valeurs de $T.\cos.u$ et $T.\cos.v$ du n° 141, et observant que $\cos.b = -\sin c$. On voit par là que la constante A exprime la tension au point K, où $s = 0$; c'est-à-dire, la pression que supporte ce point fixe ; ce que nous savions déjà. On voit aussi que la tension est variable d'un point à l'autre de la chaînette ; et si l'on cherche la plus petite valeur de T, au moyen

de l'équation $\frac{dT}{ds} = 0$, on trouve qu'elle répond à $s = \frac{A.\sin.c}{h}$, et qu'elle est égale à $A.\cos.c$.

En substituant cette valeur de s, dans l'équation (1), il vient $dy = 0$; d'où l'on conclut que la plus petite tension $A.\cos.c$, a lieu au point où la tangente à la chaînette est horizontale, c'est-à-dire, au point le plus bas de cette courbe.

144. L'équation (1) prend une forme plus simple, lorsqu'on y fait disparaître l'arc s. Pour cela, je différentie cette équation en y regardant dx comme constant; à cause de $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, je trouve

$$-A.\cos.c.d^2y = h.\sqrt{dx^2 + dy^2}.dx;$$

multipliant de part et d'autre par $\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, il vient

$$\frac{-A.\cos.c.dy.d^2y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = -A.\cos.c.d.\sqrt{dx^2 + dy^2} = hdydx;$$

et en intégrant

$$-A.\cos.c.\sqrt{dx^2 + dy^2} = hydx + Cdx;$$

C étant une constante arbitraire.

Pour la déterminer, j'observe qu'au point K, on a $y = 0$; ce qui réduit cette dernière équation à

$$-A.\cos.c.\sqrt{dx^2 + dy^2} = Cdx;$$

mais en ce point, on a aussi $\frac{dy}{dx} = \text{tang}.c$; il vient donc

$$C = -A.\cos.c.\sqrt{1 + \text{tang}^2.c} = -A.$$

Ainsi l'on a pour l'équation différentielle de la chaînette

$$A.\cos.c.\sqrt{dx^2+dy^2}=(A-hy).dx. \quad (2)$$

Si, d'après cette équation, on détermine son point le plus bas, en faisant $dy=0$, on trouve que ce point répond à

$$y=\frac{A.(1-\cos.c)}{h}.$$

On peut aussi, en éliminant dy entre les équations (1) et (2), déterminer la valeur de s en fonction de y. Cette élimination donne

$$s=\frac{A.\sin.c}{h}\mp\frac{\sqrt{(A-hy)^2-A^2.\cos^2.c}}{h}.$$

Il faudra prendre le signe supérieur du radical, depuis $y=0$, jusqu'à ce que ce radical soit nul, ce qui a lieu au point le plus bas de la courbe; au-delà de ce point, on prendra le signe inférieur.

145. Cette valeur de s nous montre que la chaînette est une courbe *rectifiable*. Pour achever d'en déterminer la nature, il faut trouver son équation en quantités finies, ou l'intégrale de l'équation (2). Or, en la résolvant par rapport à dx, il vient

$$dx=\frac{\pm A.\cos.c.dy}{\sqrt{(A-hy)^2-A^2.\cos^2.c}};$$

et comme l'abscisse x est toujours croissante, il est évident qu'on devra prendre le signe supérieur tant que la différentielle dy sera positive, ou depuis le

point K jusqu'au point le plus bas de la courbe : au-delà de ce point, dy devient négative; de sorte qu'il faudra prendre le signe inférieur, pour que dx reste positive. Cette valeur de dx peut s'intégrer par les règles connues, en conservant le double signe: en effectuant l'intégration, on trouve

$$x = C' + \frac{A.\cos.c}{h}.\log.[A - hy \mp \sqrt{(A-hy)^2 - A^2.\cos^2.c}];$$

C' étant une constante arbitraire. Comme on a $x=0$ et $y=0$, au point K, et qu'en ce point le radical doit être pris avec le signe supérieur, il vient, pour déterminer C',

$$0 = C' + \frac{A.\cos.c}{h}.\log.(A - A.\sin.c).$$

Eliminant cette constante, on a

$$x = \frac{A.\cos.c}{h}.\log.\left(\frac{A - hy \mp \sqrt{(A-hy)^2 - A^2.\cos^2.c}}{A(1 - \sin.c)}\right).$$

Cette équation fait voir que la chaînette est une courbe transcendante, du même ordre que la logarithmique. Elle donne pour l'abscisse du point le plus bas,

$$x = \frac{A.\cos.c}{h}.\log.\frac{\cos.c}{1 - \sin.c}.$$

146. On peut mettre l'équation de la chaînette sous une forme plus simple, en la résolvant par rapport à y. En effet, en passant des logarithmes aux nombres, désignant par e la base des loga-

rithmes dont le module est égal à l'unité, et faisant, pour abréger, $\frac{h}{A.\cos.c}=\theta$; on trouve

$$e^{\theta x}-\frac{A-hy}{A(1-\sin.c)}=\mp\frac{\sqrt{(A-hy)^2-A^2.\cos^2.c}}{A(1-\sin.c)};$$

ou bien, en élevant les deux membres au carré, pour faire disparaître le radical

$$e^{2\theta x}-\frac{2(A-hy)}{A(1-\sin.c)}.e^{\theta x}+\frac{\cos^2.c}{(1-\sin.c)^2}=0;$$

d'où l'on tire

$$y=\frac{A}{h}.[1-\tfrac{1}{2}(1-\sin.c).e^{\theta x}-\tfrac{1}{2}.(1+\sin.c).e^{-\theta x}].$$

147. Il nous reste encore à déterminer les valeurs de A et c, qui dépendent de la position du point K', par rapport au point K. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que les deux points de suspension sont dans une même droite horizontale. Il est clair que les deux branches de la chaînette, comprises entre le point le plus bas et ces deux points, devront être semblables; de sorte que l'arc compris entre le point K et le point le plus bas, sera la moitié de la longueur entière de la chaîne donnée, et que l'abscisse du point le plus bas sera aussi la moitié de la distance du point K' au point K. Soient donc l et l' cette longueur et cette distance; nous aurons, d'après les valeurs qu'on vient de trouver pour cet arc et pour cette abscisse (n°s 143 et 145),

$$\tfrac{1}{2}.l=\frac{A.\sin.c}{h},\qquad \tfrac{1}{2}.l'=\frac{A.\cos.c}{h}.\log.\frac{\cos.c}{1-\sin.c};$$

d'où l'on tire

$$\frac{l'}{l} = \frac{\cos.c}{\sin.c}.\log.\frac{\cos.c}{1-\sin.c}.$$

Cette équation servira à déterminer l'angle c. Comme elle est transcendante, on ne pourra la résoudre que par approximation. Quand la valeur de c sera connue, on aura celle de A, au moyen de l'une des deux équations précédentes.

148. Si, au lieu d'une chaîne pesante, il s'agissait d'un fil parfaitement flexible dont tous les points fussent tirés par des forces variables en intensité et en direction, nous pourrions encore déterminer la courbe qu'il forme dans l'état d'équilibre, en le considérant toujours comme un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits. Cette courbe sera, en général, à double courbure, et pour la déterminer, il faudra trouver ses deux équations. Soient donc x, y, z, les coordonnées du point quelconque n, parallèles à trois axes rectangulaires, menés par le point K, qui sera, comme précédemment (fig. 58), le premier point de la courbe; soit n' le point infiniment voisin de n, qui répond aux coordonnées $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$; désignons par s l'arc Kn: les projections de l'élément ds ou du côté nn' de cette courbe, sur les trois axes des x, des y et des z, sont évidemment les différentielles dx, dy et dz; par conséquent les rapports $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, expriment les cosinus des angles que fait cet élément avec les mêmes axes, ou, ce qui est la même chose, les cosinus des angles que

fait la tangente $nn't'$, à la courbe au point n, avec ces axes, car cette tangente est le prolongement indéfini du côté nn'. La tension que ce côté éprouve est une force T, dirigée suivant son prolongement nt, et égale à la résultante de toutes les forces appliquées au polygone, depuis le point K, jusqu'au point n (nº 137); les composantes de cette tension, parallèles aux axes, seront donc $-T.\frac{dx}{ds}$, $-T.\frac{dy}{ds}$ $-T.\frac{dz}{dx}$; et en égalant ces quantités aux sommes des composantes de toutes les forces qui sollicitent l'arc Kn, on formera trois équations qui détermineront la tension T et la nature de la courbe.

Or, quelles que soient les forces appliquées à chaque point de cette courbe, on peut les réduire à trois, parallèles aux trois axes des coordonnées; leurs intensités varieront d'un point à un autre; mais dans l'étendue d'un même élément, on pourra les regarder comme constantes; et alors les forces qui agissent sur cet élément seront proportionnelles à sa longueur. Représentons donc par Xds, Yds, Zds, les forces parallèles aux axes des x, des y et des z, qui agissent sur l'élement ds; de manière que x, y et z soient des fonctions données de x, y, z : les intégrales $\int Xds$, $\int Yds$, $\int Zds$, prises depuis le point K jusqu'au point n, exprimeront les résultantes des forces parallèles à ces axes, qui agissent sur l'arc Kn; mais, outre les forces appliquées à tous les points de la courbe et données en fonction de leurs coordonnées, il faut encore supposer

des forces particulières, agissant aux deux points extrêmes, et nécessaires pour l'équilibre. Je désigne par A, la force qui agit au point K, et par a, b, c, les angles que fait sa direction avec les axes des x, y, z; ses composantes seront $A.\cos.a$, $A.\cos.b$, $A.\cos.c$, et l'on devra les ajouter aux intégrales $\int Xds$, $\int Yds$, $\int Zds$, pour avoir les valeurs complètes des composantes de la tension T. Ainsi l'on aura

$$\left.\begin{aligned} -T.\frac{dx}{ds} &= A.\cos.a + \int Xds, \\ -T.\frac{dy}{ds} &= A.\cos.b + \int Yds, \\ -T.\frac{dz}{ds} &= A.\cos.c + \int Zds. \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

En éliminant T, entre ces équations, on obtient les deux équations de la courbe, savoir :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{A.\cos.a + \int Xds}{A.\cos.c + \int Zds}, \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{A.\cos.b + \int Yds}{A.\cos.c + \int Zds}. \quad (c)$$

Quant à la valeur de T, on la trouve en ajoutant les carrés des équations (6), et observant que $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; ce qui donne

$$T^2 = (A.\cos.a + \int Xds)^2 + (A.\cos.b + \int Yds)^2 + (A\cos.c + \int Zds)^2.$$

149. Comme les intégrales qui entrent dans les équations (c), s'évanouissent au point K, il s'ensuit qu'on a, en ce point,

$$-T.\frac{dx}{ds} = A.\cos.a, \quad -T.\frac{dy}{ds} = A.\cos.b, \quad -T.\frac{dy}{ds} = A.\cos.c;$$

d'où l'on conclut que la force A est égale à la tension qui a lieu au point K, et dirigée suivant le prolongement $K\alpha'$ de la tangente en ce point. C'est ce qu'on pouvait prévoir, d'après le n° 135, où l'on a vu que la force A exprime la tension du premier côté du polygone, et que sa direction détermine celle de ce côté, qui devient la direction de la première tangente, quand le polygone se change en une courbe.

K' étant le dernier point de la courbe, appelons S, S', S'', les valeurs des intégrales $\int X ds$, $\int Y ds$, $\int Z ds$, prises depuis le point K, jusqu'au point K' c'est-à-dire, dans toute l'étendue de la courbe; les équations (b) deviendront au point K',

$$-T.\frac{dx}{ds} = A.\cos.a + S,$$

$$-T.\frac{dy}{ds} = A.\cos.b + S',$$

$$-T.\frac{dz}{ds} = A.\cos.c + S'';$$

De plus, désignons par A', la force particulière qui agit au point K', et par a', b', c', les angles que fait sa direction avec les axes des x, y, z. Cette force sera égale à la tension qui a lieu au point K, et elle agira suivant le dernier côté de la courbe, ou suivant la tangente extrême $K\mathcal{C}'$; on aura donc au point K', en décomposant la force A' suivant les axes,

$$T.\frac{dx}{ds} = A'.\cos.a', \quad T.\frac{dy}{ds} = A'.\cos.b', \quad T.\frac{dz}{ds} = A'.\cos.c'.$$

Ajoutant ces équations aux précédentes, il vient

$$\left.\begin{array}{l} A.\cos.a + A'.\cos.a' + S = 0, \\ A.\cos.b + A'.\cos.b' + S' = 0, \\ A.\cos.c + A'.\cos.c' + S'' = 0. \end{array}\right\} \quad (a')$$

Ces équations sont ce que deviennent celles du n° 134, quand le polygone se change en une courbe. Lorsque les points K et K' sont libres, et que les forces A et A' sont données en grandeur et en direction, il est nécessaire qu'elles satisfassent à ces équations, pour que l'équilibre existe; lorsqu'au contraire les points K et K' sont fixes, les forces A et A' expriment les pressions inconnues qu'ils supportent, et les équations (a') sont au nombre de celles qui doivent servir à déterminer les huit inconnues A, A', a, b, c, a', b', c' (n° 138.)

150. Toutes les fois que les trois quantités X, Y, Z seront données en fonction de l'arc s, les intégrales $\int Xds$, $\int Yds$, $\int Zds$, pourront s'obtenir immédiatement. C'est, par exemple, ce qui arrivera dans le cas d'une chaîne pesante, dont l'épaisseur varie suivant une loi donnée; ce qui comprend comme cas particulier, le cas d'une épaisseur constante, que nous venons de traiter, et sur lequel il serait superflu de revenir. Mais, en général, les valeurs de X, Y, Z, seront données en fonctions de x, y, z, et pour intégrer les formules Xds, Yds, Zds, il y faudra substituer, à la place de ces trois variables, leurs valeurs en fonction

fonction de la seule variable s; substitution qui suppose que l'on connaît déjà les deux équations de la courbe. Il est donc nécessaire, pour faire usage des équations (b), de les délivrer des trois intégrales $\int Xds$, $\int Yds$, $\int Zds$, qu'elles renferment; or, en les différentiant, il vient

$$\left.\begin{aligned} -dT.\frac{dx}{ds}-T.d.\frac{dx}{ds}&=Xds,\\ -dT.\frac{dy}{ds}-T.d.\frac{dy}{ds}&=Yds,\\ -dT.\frac{dz}{ds}-T.d.\frac{dz}{ds}&=Zds.\end{aligned}\right\}\quad(b')$$

Ajoutant ces équations, après avoir multiplié la première par $\frac{dx}{ds}$, la deuxième par $\frac{dy}{ds}$, et la troisième par $\frac{dz}{ds}$, on trouve que leur somme se réduit à

$$-dT=Xdx+Ydy+Zdz,\qquad(c')$$

à cause que l'on a

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1;$$

et par conséquent

$$\frac{dx}{ds}.d.\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}.d.\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}.d.\frac{dz}{ds}=0.$$

En éliminant dT entre les équations (b'), on trouve

$$T.\left(\frac{dx}{ds}.d.\frac{dz}{ds}-\frac{dz}{ds}.d.\frac{dx}{ds}\right)=Xdz-Zdx,$$

$$T.\left(\frac{dy}{ds}.d.\frac{dz}{ds}-\frac{dz}{ds}.d.\frac{dy}{ds}\right)=Ydz-Zdy.$$

Maintenant, si l'on prend la valeur de T dans chacune de ces deux équations, et qu'on la substitue dans l'équation (c'), on obtiendra les deux équations de la courbe, délivrées du signe $\int$, mais différentielles du troisième ordre, et que nous nous dispenserons d'écrire.

Lorsque la formule $Xdx + Ydy + Zdz$ sera une différentielle complète d'une fonction des trois variables x, y, z, regardées comme indépendantes, l'équation (c') donnera immédiatement, en intégrant cette formule, la valeur de T; et en substituant cette valeur dans les deux dernières équations, on aura celles de la courbe, qui seront seulement différentielles du second ordre. Leurs intégrales contiendront quatre constantes arbitraires, que l'on déterminera en astreignant la courbe à passer par le point K, et en faisant coïncider la tangente en ce point, avec la direction de la force A. Quant à la constante qui se trouvera dans la valeur de T, elle sera déterminée par la condition qu'en ce même point, on ait $T = A$.

151. Nous pouvons facilement vérifier que les six équations du n° 60 ont lieu dans l'équilibre du système que nous considérons, ainsi que cela doit être d'après la remarque générale du n° 133. En effet, nous avons déjà les équations (a') qui répondent aux équations (1), (2) et (4) du n° 60. Ensuite, en multipliant la première des équations (b'), par y, et la retranchant de la seconde multipliée par x, il vient

$$\left(y.\frac{dx}{ds}-x.\frac{dy}{ds}\right).dT+\left(y.d.\frac{dx}{ds}-x.d.\frac{dy}{ds}\right).T=(Yx-Xy).ds\,;$$

équation qu'on peut écrire ainsi :

$$d.\left[\left(y.\frac{dx}{ds}-x.\frac{dy}{ds}\right).T\right]=(Yx-Xy).ds\,,$$

et d'où l'on tire, en intégrant,

$$\left(y.\frac{dx}{ds}-x.\frac{dy}{ds}\right).T=\int(Yx-Xy).ds+C, \qquad (d)$$

C étant la constante arbitraire. Pour la déterminer, supposons que l'intégrale $\int(Yx-Xy).ds$ commence ou soit nulle au point K, et soit α et β, les valeurs de x et y qui répondent à ce point; comme nous avons, en ce même point (n° 149),

$$-T.\frac{dx}{ds}=A.\cos.a, \qquad -T.\frac{dy}{ds}=A.\cos.b,$$

il s'ensuit

$$A(\alpha.\cos.b-\beta.\cos.a)=C.$$

Représentons aussi par α' et β', les valeurs de x et y, relatives au point K', et faisons

$$\int(Yx-Xy).ds=S_{,},$$

l'intégrale étant prise dans toute l'étendue de la courbe, ou depuis le point K jusqu'au point K'. On a, en ce dernier point (n° 149),

$$T.\frac{dx}{ds}=A'.\cos.a', \qquad T.\frac{dy}{ds}=A'.\cos.b';$$

14..

l'équation (d) deviendra donc, relativement au point K',

$$A'(C'.\cos.a' - \alpha'.\cos.b') = S_{,} + C;$$

ou bien, en substituant pour C sa valeur, et faisant tout passer dans un même membre,

$$A(\alpha.\cos.b - C.\cos.a) + A'(\alpha'.\cos.b' - C'.\cos.a') + S_{,} = 0;$$

or, il est aisé de voir que cette équation répond à l'équation (3) du n° 60.

Par une analyse semblable, on déduira des équations (b'), deux autres équations, analogues à celle-ci et correspondant aux équations (5) et (6) de ce numéro.

§. II. *Équation de la Lame élastique en équilibre.*

152. Le fil dont nous venons de donner les équations d'équilibre, était supposé parfaitement flexible, mais dénué d'élasticité ; nous allons présentement avoir égard à cette qualité de la matière, et montrer comment elle influe sur les conditions de l'équilibre.

Considérons une lame inextensible, flexible et élastique, qui soit naturellement plane et d'une largeur constante dans toute son étendue, c'est-à-dire, que quand elle n'est sollicitée par aucune force, elle a la forme d'un rectangle plan, d'une longueur et d'une largeur données. Supposons cette lame fixement attachée par une de ses extrémités, et appliquons à l'autre extrémité, une force qui la fléchisse dans le sens de sa longueur, de manière qu'elle se

change en une portion de surface cylindrique. Le problème qui va nous occuper, consiste à déterminer la section de cette surface, perpendiculaire à la largeur de la lame.

La figure 39 représente cette section; la courbe $K'mK$ est la forme de la lame, après son inflexion; la droite $K'K''$, égale en longueur à cette courbe, représente la lame avant l'inflexion; l'extrémité K' est fixement attachée, et la lame est assujétie en ce point de manière qu'en se courbant elle est forcée de rester tangente à sa direction primitive $K'K''$. Elle est prolongée à son autre extrémité K, par une verge inflexible CK, et c'est au point C, dans le plan de la figure et suivant la direction CD, qu'est appliquée la force qui a infléchi la lame et qui la retient dans la position $K'mK$; de sorte que l'équilibre existe entre cette force, et l'élasticité de la lame, considérée comme une autre force qui tend à la ramener à sa forme primitive, ou à la remettre en ligne droite.

153. Pour trouver les conditions de cet équilibre, je substitue à la courbe $K'mK$, un polygone d'une infinités de côtés infiniment petits, dont le premier côté $K'H$ est pris sur la droite $K'K''$, fixe et donnée de position. Soient m,m et mm' (fig. 40), deux côtés consécutifs; mt et $m't'$, leurs prolongemens : supposons que les deux parties $K'm$ et Km du polygone, deviennent inflexibles, de manière que le polygone ne conserve sa flexibilité et son élasticité qu'au seul point m, et imaginons de plus

que la partie $K'm$ soit fixée et rendue immobile. Ces suppositions ne détruiront pas l'équilibre existant; mais maintenant l'élasticité n'a plus d'autre effet que de tendre à faire tourner le côté mm' autour du point m, pour le remettre en ligne droite avec le côté $m_,m$; on peut donc la regarder comme une force, perpendiculaire à la droite mt', et agissant en tel point qu'on voudra de cette droite, par exemple, au point B, suivant la direction BE. Représentons cette force inconnue par F; appelons P, la force donnée qui agit suivant la direction CD; p, la perpendiculaire abaissée du point m, sur la ligne CD; et pour simplifier, supposons égale à l'unité, la perpendiculaire mB, abaissée du même point sur la ligne BE : puisque les deux forces F et P se font équilibre autour du point m supposé fixe, leurs momens doivent être égaux par rapport à ce point; par conséquent on a

$$F = Pp.$$

Réciproquement, le premier côté $K'H$ étant réellement fixe, l'équilibre existe, si cette équation a lieu par rapport à tous les sommets du polygone.

154. La force F varie, d'un sommet à un autre, parce qu'elle dépend de l'angle tmt' compris entre les prolongemens mt et mt' des deux côtés consécutifs, et qu'on appelle l'angle de *contingence*. Cette force est nulle quand l'angle est zéro; on conçoit qu'elle augmente avec cet angle : dans les ressorts homogènes et d'une égale épaisseur dans

toute leur étendue, on a coutume de la supposer proportionnelle à l'angle de contingence. En adoptant donc cette hypothèse, et en désignant par A, la valeur de F qui répond à un sommet déterminé du polygone; par α, l'angle de contingence en ce point; par ω, l'angle tmt', relatif au sommet quelconque m, nous aurons cette proportion

$$F : A :: \omega : \alpha;$$

d'où l'on tire

$$F = A.\frac{\omega}{\alpha}.$$

L'angle de contingence devient infiniment petit, lorsque le polygone se change en une courbe continue; cette valeur de F a donc alors l'inconvénient de renfermer le rapport $\frac{\omega}{\alpha}$ de deux quantités infiniment petites; mais on peut le remplacer par le rapport inverse des rayons de courbure de la courbe, correspondant aux angles ω et α. En effet, élevons sur les milieux n et n' des deux élémens consécutifs m,m et mm', les perpendiculaires ng et $n'g$ qui se rencontrent en un point g; ce point sera le centre et ng le rayon de courbure, qui répondent au point m; de plus on aura

$$\sin.mgn = \frac{mn}{ng};$$

l'angle tmt' sera égal à l'angle $n'gn$, ou double de l'angle mgn; et comme ces angles sont infiniment petits, ils sont égaux à leurs sinus, de sorte qu'on

a $tmt' = 2 . \sin . mgn$; donc, à cause que mn est moitié de mm', on aura

$$tmt' = \frac{mm'}{ng};$$

ce qui montre que l'angle de contingence est égal à l'élément de la courbe, divisé par le rayon de courbure correspondant. Donc, en supposant la courbe partagée en élémens égaux, et représentant par r et a, les rayons de courbure qui répondent aux angles ω et α, nous aurons

$$\frac{\omega}{\alpha} = \frac{r}{a}.$$

Je substitue cette valeur dans celle de F, et celle-ci dans l'équation $F = Pp$, il vient

$$Pp = \frac{b}{r}, \qquad (1)$$

en faisant, pour abréger $Aa = b$. Cette quantité b dépend de l'épaisseur et de la matière de la lame que l'on considère ; elle est la même dans toute l'étendue d'une lame homogène et d'une épaisseur constante ; elle varie d'une lame à une autre, et elle doit être donnée pour chaque lame en particulier.

L'équation (1) qui convient à tous les points de la courbe KmK', est l'équation différentielle de cette courbe : il ne s'agit plus maintenant que d'y introduire les coordonnées du point m à la place des deux variables r et p.

155. Prenons le point K pour origine; la ligne Kx perpendiculaire à la droite KC, pour axe des abscisses, et le prolongement Ky de cette droite, pour celui des ordonnées. Soient x et y, l'abscisse et l'ordonnée du point m; c, la longueur de la droite KC; γ, l'angle DCK; décomposons la force P, qui agit suivant CD, en deux forces dirigées suivant CK et suivant CA perpendiculaire à CK; ses composantes seront $P.\cos.\gamma$ et $P.\sin.\gamma$, et leurs momens, par rapport au point m, seront égaux à $xP.\cos.\gamma$ et $(y+c).P.\sin.\gamma$; donc on aura (nº 53).

$$Pp = P[(y+c).\sin.\gamma - x.\cos.\gamma].$$

D'ailleurs, on sait qu'on a, en prenant dx constante

$$r = \pm \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

La valeur de r devant toujours être positive, on doit prendre le signe + ou le signe —, selon que celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positive ou négative; or, d'après la direction que nous avons donnée à l'axe des abscisses, par rapport à celle de la force P, la courbe $K'mK$ tourne sa concavité vers cet axe; cas dans lequel le coefficient différentiel $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif; par conséquent c'est le signe — qu'il faut employer devant la valeur de r. Au moyen de cette valeur

et de celle de Pp, l'équation (1) devient

$$-\frac{b\,dx\,d^2y}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}=P[(y+c).\sin.\gamma-x.\cos.\gamma]. \qquad (2)$$

156. On obtient aisément une intégrale première de cette équation différentielle du second ordre, en faisant

$$(y+c).\sin.\gamma-x.\cos.\gamma=z, \qquad \frac{dz}{dx}=u;$$

d'où l'on conclut

$$\sin.\gamma.dy=udx+\cos.\gamma.dx,$$
$$\sin.\gamma.d^2y=du.dx,$$
$$(dy^2+dx^2).\sin^2.\gamma=(u^2+2u.\cos.\gamma+1).dx^2;$$

substituant dans l'équation (2), il vient

$$\frac{-b.\sin.\gamma.\frac{du}{dx}}{(u^2+2u.\cos.\gamma+1)^{\frac{3}{2}}}=Pz;$$

multipliant le premier membre par udx, et le second par dz, on a

$$\frac{-b.\sin^2.\gamma.udu}{(u^2+2u.\cos.\gamma+1)^{\frac{3}{2}}}=Pzdz;$$

équation dans laquelle les variables u et z sont séparées.

Le premier membre s'intègre par les règles connues ; mais comme son intégrale est un peu compliquée, et qu'elle ne nous servirait à rien, je ne l'écrirai point ici ; pour simplifier, je supposerai que la direction de la force P est perpendi-

culaire à la ligne CK. On a alors $\gamma = 100°$, ce qui réduit notre équation à

$$\frac{-budu}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}} = Pzdz;$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\frac{2b}{\sqrt{u^2+1}} = Pz^2 + f;$$

f étant la constante arbitraire. Je résous cette équation par rapport à u, j'y mets $\frac{dy}{dx}$ à la place de u, et pour z sa valeur que la supposition de $\gamma = 100°$, réduit à $y + c$; tout calcul fait, je trouve

$$dx = \frac{[P(y+c)^2 + f].dy}{\sqrt{4b^2 - f^2 - 2fP(y+c)^2 - P^2(y+c)^4}}. \quad (3)$$

Cette formule n'est point intégrable sous forme finie, par les règles connues; ainsi, l'équation en x et y de la courbe élastique $K'mK$, ne peut être donnée qu'en série infinie.

Au point K, origine des coordonnées, nous avons $x = 0$ et $y = 0$; de plus, la droite KC étant supposée le prolongement de la lame élastique (n° 152), il s'ensuit qu'elle est sa tangente au point K; et comme nous avons pris la droite CKy pour axe des ordonnées, il en résulte que cette tangente sera perpendiculaire à l'axe des abscisses; donc on aura aussi au point K, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{0}$ ou $\frac{dx}{dy} = 0$. Ces deux

conditions $y=0$ et $\frac{dx}{dy}=0$, pour $x=0$, serviront à déterminer les deux constantes arbitraires, contenues dans l'équation en x et y de la courbe $K'mK$, savoir, la constante f et celle qu'introduira l'intégration de la valeur de dx.

157. Lorsque cette équation de la courbe $K'mK$ sera complètement déterminée, on en pourra déduire la valeur de l'arc quelconque Km, en fonction de l'ordonnée y du point m; on aura donc aussi la longueur de la courbe entière KmK', en fonctions de l'ordonnée $K'L$ du point K'; donc à cause que cette longueur est donnée et égale à la droite $K'K''$, on en conclura réciproquement la valeur de $K'L$. Si l'on substitue cette valeur à la place de y dans l'équation (3), elle donnera la valeur de $\frac{dx}{dy}$, qui répond au point K', et qui renfermera les quantités c, P, b et la longueur de la la lame, que je représenterai par l. Or, au point K', la tangente à la courbe est la droite $K'K''$ donnée de position (n° 152); en désignant donc par θ l'angle $K'Gy$ que cette droite fait avec l'axe de y, on aura, pour le point K', $\frac{dx}{dy}=\text{tang.}\,\theta$; de sorte qu'en mettant pour $\frac{dx}{dy}$, la valeur qu'on aura trouvée, il en résultera une équation de condition entre les cinq quantités c, P, b, l et θ.

On peut appeler l'angle θ, l'*inflexion totale de la lame*. Quand les quantités c, P, b, l seront données,

l'équation de condition fera connaître cette inflexion ; si, au contraire, on a mesuré l'angle θ, la longueur de la lame, celle de la verge CK, et que la force P soit toujours donnée, cette équation servira à déterminer la valeur de la quantité b, relative à la lame que l'on considère. Cette valeur une fois connue, l'équation de condition déterminera l'inflexion de cette lame, qui répond à une force donnée, ou, réciproquement, la force qu'il faut employer pour produire une inflexion donnée. Mais on ne doit pas oublier que tous ces calculs ne pourront s'effectuer que par approximation, puisque l'équation de la courbe $K'mK$, sur laquelle ils sont fondés, n'est donnée qu'en série. Nous allons, tout-à-l'heure, donner un exemple fort simple de cette approximation.

158. Observons auparavant que si la lame n'était pas assujettie, comme nous l'avons supposé, à son extrémité K', et qu'au contraire cette extrémité fût entièrement libre, il faudrait, pour l'équilibre, qu'une force égale à la force P fût appliquée au point K', et que ces deux forces fussent dirigées en sens contraires l'une de l'autre, suivant la droite CK' qui joint leurs points d'application K' et C. Si le point K' était fixé de manière que la lame conservât la liberté de tourner autour de ce point, il suffirait, pour empêcher ce mouvement, que la direction de la force P vînt passer par le point K', c'est-à-dire, que cette force devrait être dirigée

suivant la droite CK'. Cette direction ne peut être arbitraire, que dans le seul cas où non-seulement le point K' est supposé fixe, mais aussi le premier côté de la courbe, ou la direction de sa tangente en ce point. Au reste, dans tous les cas, la figure de la lame en équilibre est toujours la même et déterminée par l'équation (3).

159. Examinons le cas particulier où l'inflexion de la lame est très-petite. Pour simplifier, supposons $c=0$, ensorte que la force P soit appliquée au point K. Supposons aussi que l'autre extrémité K' soit seulement appuyée sur un plan fixe, sans être entièrement fixée, ce qui exige que la force P soit alors dirigée suivant la droite KK' qui joint le point K au point K'. Ce cas particulier sera, si l'on veut, celui d'un ressort vertical posé, par une de ses extrémités, sur un plan fixe horizontal, et chargé, à l'autre extrémité, d'un poids donné P, qui l'infléchit un tant soit peu, et lui fait prendre la forme de la courbe KmK' (fig. 41.). Il s'agit de trouver son équation en x et y, l'axe des x étant la verticale KK', et l'axe des y, l'horizontale Ky. On pourrait la déduire de l'équation (3), en y faisant $c=0$, et y négligeant la quatrième puissance de l'ordonnée y, qui est très-petite dans toute l'étendue de la courbe ; mais on l'obtiendra plus simplement au moyen de l'équation (2).

En faisant dans cette équation $\gamma=100^\circ$ et $c=0$, elle devient

$$\frac{-b.\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=Py.$$

Or, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est très-petite dans toute l'étendue de la courbe, parce que la tangente en chaque point est peu inclinée sur l'axe des abscisses ; on peut donc, par approximation, négliger son carré dans le premier membre, ce qui réduit l'équation à celle-ci :

$$-b.\frac{d^2y}{dx^2}=Py,$$

dont l'intégrale complète est

$$y=h.\sin.\left(x.\sqrt{\frac{P}{b}}+f\right);$$

h et f étant les deux constantes arbitraires. Comme on a, au point K, $x=0$ et $y=0$, il s'ensuit $f=0$; l'équation de la courbe KmK' est donc

$$y=h.\sin.\mathit{6}x,$$

en faisant, pour abréger, $\sqrt{\frac{P}{b}}=\mathit{6}$.

160. La constante h exprime la plus grande valeur de y, ou la plus grande quantité dont la courbe s'écarte de la direction verticale. Pour la déterminer, j'observe que $y=0$ au point K'; il faut donc que h soit nulle, ou que l'arc $\mathit{6}x$, qui répond à

ce point, soit un multiple de la demi-circonférence ; appelant donc a l'abscisse KK', i un nombre entier indéterminé, et π la demi-circonférence pour le rayon égal à l'unité, on devra avoir $\mathcal{C}a = i\pi$; ou bien, en remettant pour $\mathcal{C}$ sa valeur et élevant au carré,

$$\frac{Pa^2}{b} = i^2\pi^2. \qquad (4)$$

S'il est impossible de satisfaire à cette équation, il faudra nécessairement qu'on ait $h = 0$; par conséquent la courbe KmK' coïncidera avec l'axe des abscisses, et le ressort ne subira aucune inflexion.

La valeur de a se conclut de la longueur de la courbe entière, qui est donnée, et que nous avons désignée plus haut par l. On a, en prenant l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$,

$$l = \int dx.\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \int dx.\left(1 + \frac{1}{2}.\frac{dy^2}{dx^2} - \text{etc.}\right).$$

L'équation de la courbe donne

$$\frac{dy}{dx} = h\mathcal{C}.\cos.\mathcal{C}x;$$

d'où il suit

$$\frac{dy^2}{dx^2} = h^2\mathcal{C}^2.\cos^2.\mathcal{C}x = \frac{1}{2}.\frac{h^2P}{b} + \frac{1}{2}.\frac{h^2P}{b}.\cos.2\mathcal{C}x.$$

Je substitue cette valeur dans celle de l, et je néglige les puissances de $\frac{dy}{dx}$ supérieures à la seconde ; intégrant ensuite entre les limites assignées, et

et observant que $\sin.2\mathcal{C}a = \sin.2i\pi = 0$, quel que soit le nombre entier i, il vient

$$l = \left(1 + \frac{1}{4}.\frac{h^2P}{b}\right).a.$$

J'élimine a entre cette équation et l'équation (4); je néglige, dans le résultat, la quatrième puissance de h, et je le mets sous cette forme

$$h^2 = \frac{2l^2}{i^2\pi^2}.\left(1 - i^2.\frac{b\pi^2}{Pl^2}\right). \qquad (5)$$

Or, la plus petite valeur qu'on puisse prendre pour i, c'est $i = 1$; si donc on a

$$\frac{b\pi^2}{Pl^2} > 1, \quad \text{ou} \quad P < \frac{b\pi^2}{l^2},$$

cette équation sera impossible, puisque la valeur de h^2 serait négative, et celle de h, imaginaire ; donc alors le ressort ne sera pas courbé par le poids P : il conservera au contraire sa forme rectiligne et sa situation verticale.

Nous sommes donc conduits à cette conclusion singulière, que le poids P doit surpasser la quantité $\frac{b\pi^2}{l^2}$, pour que le ressort que nous considérons subisse une inflexion aussi petite qu'on voudra. Un poids égal à $\frac{b\pi^2}{l^2}$ est le plus grand de ceux qu'il peut supporter sans fléchir : c'est ce qu'on appelle *la force du ressort* ; on voit qu'elle est proportionnelle à la quantité b, qui mesure son élasticité, et que

dans les ressorts de même matière et de même épaisseur, elle est en raison inverse du carré de la longueur l.

161. Pour peu que le poids P surpasse cette limite $\frac{b\pi^2}{l^2}$, le ressort se courbera. Dans cette supposition, on pourra faire

$$\frac{b\pi^2}{Pl^2} = 1 - \delta^2,$$

δ étant une quantité très-petite et réelle. On satisfera à l'équation (5), en prenant

$$l = 1 \quad \text{et} \quad h = \frac{l\sqrt{2}}{\pi} . \delta;$$

on aura aussi $b = \frac{\pi}{a}$, et l'équation de la courbe KmK' deviendra

$$y = \frac{l\sqrt{2}}{\pi} . \delta . \sin . \frac{\pi x}{a}.$$

A mesure que le poids P augmentera, la quantité δ croîtra aussi, et la courbe s'infléchira de plus en plus ; mais bientôt sa forme ne sera plus déterminée avec une exactitude suffisante, par cette équation qui n'est qu'approchée, et qui suppose l'inflexion très-petite.

Lorsque P sera devenu un peu plus grand que $4 . \frac{b\pi^2}{l^2}$, c'est-à-dire, quand on aura

$$4 . \frac{b\pi^2}{Pl^2} = 1 - \delta'^2,$$

δ' étant une quantité réelle et très-petite, on satisfera encore à l'équation (5) par une très-petite valeur de h, pourvu qu'on prenne $i=2$. On aura alors

$$h=\frac{l\sqrt{2}}{2\pi}.\delta', \quad c=\frac{2\pi}{a},$$

et, pour l'équation de la courbe KmK',

$$y=\frac{l\sqrt{2}}{2a}.\delta'.\sin.\frac{2\pi x}{a}.$$

Cette valeur de y devient nulle, quand $x=\frac{1}{2}a$; par conséquent la courbe coupe l'axe des abscisses au milieu de la droite KK', et elle a la forme représentée par la figure 42. Mais la lame élastique prendra-t-elle effectivement cette forme, ou bien en prendra-t-elle une autre qui suppose une inflexion considérable et qui échappe à notre calcul d'approximation? C'est une question qui ne pourrait être résolue d'une manière tout-à-fait satisfaisante, que par une solution rigoureuse et complète du problème.

En général, lorsque le poids P surpassera d'une très-petite quantité, le produit $i^2.\frac{b\pi^2}{l^2}$, on satisfera à l'équation (5) par une valeur réelle et très-petite de h, et l'on pourra supposer à la lame élastique, une forme qui s'écarte peu de l'axe vertical: la courbe coupera cet axe en un nombre $i-1$ de points, sans compter les deux points extrêmes.

La figure 43 se rapporte au cas de $i = 3$; la droite KK' y est coupée en trois parties égales par la courbe KmK'.

162. Si l'on a bien saisi le principe d'après lequel nous avons trouvé l'équation d'équilibre de la lame élastique, dans le n° 153, on étendra sans difficulté cette équation, au cas où tous les points de la lame seraient sollicités par des forces dirigées dans le plan de la courbe KmK' (fig. 39.). En effet, il suffira d'y remplacer le moment de la force P, par la somme des momens des forces qui agissent sur la lame, depuis le point K jusqu'au point quelconque m, en prenant avec le signe $+$, les momens des forces qui tendent à infléchir la lame, et avec le signe $-$, ceux des forces qui tendent à la redresser.

Soit donc, comme dans le problème du fil flexible (n° 148.), Xds et Yds les composantes parallèles aux axes Kx et Ky, des forces qui agissent sur l'élément ds, de manière que X et Y soient des fonctions données des variables x et y ; soit μ un point de l'arc Km, qui répond aux coordonnées x' et y', et désignons par X' et Y', ce que deviennent X et Y, relativement à ce point : les momens des forces $X'ds$ et $Y'ds$, pris par rapport au point m, seront égaux à $(y-y').X'ds$ et $(x-x').Y'ds$; d'ailleurs, les composantes qui agissent dans le sens de l'axe Kx tendent à infléchir la courbe, et celles qui agissent dans le sens

de l'axe Ky tendent à la redresser; par conséquent la somme des momens de toutes les forces appliquées à l'arc Km, sera égale à $\int(y-y').X'ds - \int(x-x').Y'ds$; les intégrales étant prises en supposant x et y constantes, et depuis le point K, où l'on a $x'=0$ et $y'=0$, jusqu'au point m, où l'on a $x'=x$ et $y'=y$. En conservant donc, en outre, la force P, appliquée à l'extrémité de la droite CK, et dont le moment est Pp, l'équation d'équilibre sera

$$Pp+\int(y-y').X'ds-\int(x-x').Y'ds=F;$$

ou bien, en substituant pour la perpendiculaire p et pour la force F, leurs valeurs trouvées dans le n° 154,

$$P[(y+c).\sin.\gamma - x.\cos.\gamma]+\int(y-y').X'ds - \int(x-x').Y'ds=\frac{b}{r}:$$

r représente le rayon de courbure au point m; b est une quantité constante, si la lame est supposée homogène et d'une égale épaisseur dans toute son étendue; c et γ, sont des constantes données.

Il est aisé de voir que les intégrales $\int(y-y').X'ds$ et $\int(x-x').Y'ds$, prises comme elles doivent l'être, sont la même chose que $y.\int Xds - \int yXds$ et $x.\int Yds - \int xYds$, pourvu qu'on prenne celles-ci : $\int Xds$, $\int yXds$, $\int Yds$ et $\int xYds$, de manière qu'elles s'évanouissent au point K. Cette équation

peut donc être écrite ainsi :

$$P[(y+c).\sin.\gamma - x.\cos.\gamma] + y.\int Xds - \int yXds - x.\int Yds + \int yXds = \frac{b}{r}.$$

En y mettant pour r, sa valeur en différentielles de x et y, et faisant disparaître, par la différentiation, les signes $\int$ qu'elle contient, on aura l'équation différentielle de la courbe élastique dont tous les points sont sollicités par des forces dirigées dans un même plan.

CHAPITRE VII.

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

163. En comparant entre elles les conditions d'équilibre dans les machines simples, et en cherchant ce qu'elles ont de commun, les géomètres sont enfin parvenus à découvrir, par induction, une loi générale qui s'observe dans tout système de forces en équilibre. C'est dans cette loi que consiste le *principe des vitesses virtuelles* : nous allons d'abord en donner l'énoncé; puis nous le vérifierons dans plusieurs cas d'équilibre, et ensuite nous essaierons d'en donner une démonstration directe et générale.

Nous représenterons par P, P', P'', etc., les forces données; par mA, $m'A'$, $m''A''$, etc. (fig. 44), leurs directions, et par m, m', m'', etc., leurs points d'application. Ces points matériels sont liés entre eux d'une manière quelconque, par des fils inextensibles, ou par des droites inflexibles, ou par tout autre moyen physique que l'on peut concevoir; il peut s'en trouver, parmi ces points, qui soient assujétis à rester sur des surfaces ou sur des courbes données, et d'autres qui soient tout-à-fait immobiles.

Supposons que l'on communique un mouvement

infiniment petit à ce système de points, de manière que le point m soit transporté de m en n, le point m', de m' en n', etc., sans que les conditions qui lient ces points entre eux, soient violées: les droites infiniment petites mn, $m'n'$, $m''n''$, etc., décrites par les points m, m', m'', etc., sont ce que nous appellerons *les vitesses virtuelles* de ces points; et si l'on projette l'une de ces droites sur la direction de la force appliquée au même point, on aura la vitesse virtuelle de ce point, *estimée* suivant la direction de cette force. Ainsi, j'abaisse du point n, une perpendiculaire na sur la direction mA de la force P, ou sur son prolongement; du point n', une perpendiculaire $n'a'$ sur la direction de P', ou sur son prolongement; etc.; et de cette manière, j'ai les lignes ma, $m'a'$, $m''a''$, etc., pour les vitesses virtuelles des points m, m', m'', etc., estimées suivant les directions des forces qui agissent sur ces points.

Dans tout ce qui va suivre, nous donnerons le signe $+$ à celles des projections ma, $m'a'$, $m''a''$, etc., qui sont comptées sur les directions mêmes des forces, et le signe $-$ à celles qui tombent sur les prolongemens de ces directions; de sorte que si l'on fait

$$ma = p, \quad m'a' = p', \quad m''a'' = p'', \quad \text{etc.},$$

les quantités p, p', p'', etc., pourront être positives ou négatives: par exemple, la figure suppose p, p', p''' positives, et p'', p^{IV} négatives. Au contraire, les quantités P, P', P'', etc., qui représentent les in-

tensités des forces, sont toujours positives, comme nous en sommes convenus au commencement de ce Traité (n° 10.).

Cela posé, *si les forces* P, P′, P″, *etc.*, *sont en équilibre*; *la somme de ces forces*, *multipliées respectivement par les vitesses virtuelles* p, p′, p″, *etc.*, *estimées suivant leurs directions*, *est égale à zéro*; *c'est-à-dire*, *que l'on a*

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} = 0; \qquad (a)$$

et réciproquement, *les forces* P, P′, P″, *etc.*, *sont en équilibre*, *quand cette équation a lieu pour tous les mouvemens infiniment petits que l'on peut donner au système des points* m, m′, m″, *etc.*

Tel est l'énoncé le plus général du principe des vitesses virtuelles. Quant à son usage pour résoudre les questions de Statique, il ne s'agira, dans chaque cas particulier, que de distinguer les différens mouvemens infiniment petits que le système des points m, m', m'', etc., est susceptible de prendre, et de déterminer pour chacun de ces mouvemens, les vitesses virtuelles p, p', p'', etc., estimées suivant les directions des forces données : cela fait, le principe des vitesses virtuelles, ou l'équation (a) qui le renferme, donnera immédiatement toutes les équations d'équilibre qui seront en nombre égal à celui des mouvemens possibles.

164. Considérons, par exemple, un levier *DCE* (fig. 45.), formé par une ligne inflexible comprise dans un même plan. Soit *C* le point d'ap-

pui ; P et P' deux forces dirigées dans le plan du levier et appliquées aux points m et m' de cette ligne, suivant les directions mA et mA'. Le levier ne peut prendre qu'un mouvement de rotation autour du point C ; on n'aura donc qu'une seule équation d'équilibre, savoir :

$$Pp + P'p' = 0;$$

p et p' étant les vitesses virtuelles de m et m', estimées suivant les directions de P et P', qui résultent de ce mouvement.

Pour déterminer les valeurs et les signes de p et p', j'observe d'abord que cette équation ne peut avoir lieu, sans que ces quantités ne soient de signes contraires ; ce qui exige que les forces P et P' tendent à faire tourner le levier dans des sens opposés autour du point C. Je suppose donc que la rotation qu'on imprime au levier se fasse dans le sens de la force P, et alors c'est p qui est positive et p' négative. Dans un pareil mouvement, les angles mCn et $m'Cn'$, décrits par les lignes Cm et Cm' sont égaux ; les arcs mn et $m'n'$, décrits par m et m' autour du point C comme centre, sont donc entre eux comme les rayons Cm et Cm' : ils conservent le même rapport quand ils deviennent infiniment petits, de sorte que l'on a toujours

$$\frac{mn}{Cm} = \frac{m'n'}{Cm'}.$$

Abaissons des points n et n', des perpendiculaires na et $n'a'$, sur les directions des forces P et P' ;

nous aurons

$$p = ma, \quad p' = -m'a'.$$

Abaissons aussi du point C, des perpendiculaires Cb et Cb', sur les mêmes directions, et faisons $Cb=q$, $Cb'=q'$. En considérant les arcs infiniment petits mn et $m'n'$ comme des lignes droites perpendiculaires aux rayons Cm et Cm', les triangles Cbm, et mna seront semblables, ainsi que les triangles $Cb'm'$ et $m'n'a'$; et l'on en conclura

$$ma = \frac{mn}{Cm}.Cb, \quad m'a' = \frac{m'n'}{Cm'}.Cb';$$

par conséquent

$$p = \frac{mn}{Cm}.q, \quad p' = -\frac{m'n'}{Cm'}.q'.$$

Si l'on substitue ces valeurs de p et p', dans l'équation des vitesses virtuelles, et que l'on supprime les facteurs égaux $\frac{mn}{Cm}, \frac{m'n'}{Cm'}$, il vient

$$Pq - P'q' = 0;$$

d'où il suit que les forces P et P', qui se font équilibre au moyen d'un levier, sont réciproquement proportionnelles aux perpendiculaires q et q', abaissées du point d'appui sur leurs directions; ce qui revient à dire que leurs momens sont égaux par rapport à ce point.

Comme ce théorème a été démontré directement dans le n° 57, il en résulte que le principe des

vitesses virtuelles est vérifié, relativement à l'équilibre du levier. A la vérité, nous n'avons appliqué que deux forces à cette machine; mais on peut, si l'on veut, en considérer un plus grand nombre; et quel que soit ce nombre, on déduira du principe des vitesses virtuelles, la même condition d'équilibre que dans le n° cité. Ce principe se vérifie aussi, sans aucune difficulté, dans l'équilibre du *treuil*, de la *poulie* et de la *vis*, dont les conditions sont généralement connues.

165. Pour donner une seconde application du principe des vitesses virtuelles, cherchons, d'après ce principe, les conditions d'équilibre de deux corps pesans, attachés ensemble par un fil inextensible, et posés sur deux plans inclinés, adossés l'un à l'autre, c'est-à-dire, sur deux plans inclinés qui ont une hauteur commune, et leurs bases sur un même plan horizontal.

La figure 46 représente une section des deux corps, faite par un plan vertical passant par leurs centres de gravité m et m'. Nous désignerons par P et P', leurs poids, qui sont des forces appliquées aux points m et m' suivant les verticales mA et $m'A'$; par l, la longueur BH du plan sur lequel est posé le poids P; par l', la longueur $B'H$ de l'autre plan incliné; enfin par h, la hauteur commune HC. Si le point m descend sur le premier plan d'une quantité mn, il est évident que le point m', à cause du fil inextensible qui lie les deux corps, montera sur le second plan, d'une quantité $m'n'$ égale à mn; les vitesses

virtuelles de ces points, estimées suivant les directions des poids P et P', seront donc de signes contraires : la vitesse p de m sera positive, la vitesse p' de m' sera négative. En abaissant des points n et n', sur les verticales mA et $m'A'$, des perpendiculaires na et $n'a'$, et en comparant les triangles semblables man et BHC, $m'a'n'$ et $B'HC$, on trouvera

$$ma = \frac{h}{l}.mn, \quad m'a' = \frac{h}{l'}.m'n';$$

par conséquent

$$p = ma = \frac{h}{l}.mn, \quad p' = -m'a' = -\frac{h}{l'}.m'n'.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation fournie par le principe des vitesses virtuelles, savoir :

$$Pp + P'p' = 0;$$

supprimant les facteurs égaux mn et $m'n'$, et le facteur commun h, il vient

$$Pl' = P'l;$$

ce qui nous fait voir que quand l'équilibre a lieu, les poids P et P' sont entre eux comme les longueurs des plans inclinés sur lesquels ils sont posés.

C'est en effet ce que l'on peut trouver directement, en décomposant chacune des forces verticales en deux autres, l'une perpendiculaire au plan incliné et qui sera détruite, et l'autre dirigée suivant ce plan. Les composantes dirigées suivant les plans inclinés, seront $P.\frac{h}{l}$ et $P'.\frac{h}{l'}$, d'après ce qu'on

a vu dans le n° 98; pour l'équilibre, il faudra qu'elles soient égales entre elles : on aura donc, de cette manière,

$$P.\frac{h}{l}=P'.\frac{h}{l'}, \quad \text{ou} \quad Pl'=P'l,$$

comme par le principe des vitesses virtuelles.

166. Si nous analysions les différens mouvemens que peut prendre un corps solide, de forme quelconque, libre ou gêné par des obstacles fixes, le principe des vitesses virtuelles nous fournirait une équation d'équilibre pour chacun de ces mouvemens, et par ce moyen, nous retrouverions les équations du chapitre second. Il en résulterait donc une nouvelle vérification de ce principe; mais cette vérification, qui serait d'ailleurs un peu longue, nous paraît superflue : les deux exemples que nous venons de donner, et ceux que chacun peut y ajouter, suffisent pour éclaircir le sens qu'on doit attacher à ce principe général que nous allons maintenant entreprendre de démontrer directement.

167. Voici d'abord une proposition relative à la composition des forces, sur laquelle notre démonstration sera en partie fondée.

Soient des forces quelconques Q, Q', Q'', etc., appliquées en un même point m (fig. 47), suivant les directions mB, mB', mB'', etc., comprises ou non comprises dans un même plan ; soit aussi P leur résultante, et mA, sa direction. Menons par ce point, dans une direction quelconque, la ligne mn, et

décomposons chacune des forces P, Q', Q'', etc., en deux autres, l'une dirigée suivant la ligne mn, l'autre perpendiculaire à cette ligne. Puisque P est la résultante de toutes les autres forces, sa composante suivant la ligne mn sera égale à la somme des composantes de ces autres forces, suivant la même ligne : en désignant donc par a, α, α', α'', etc., les angles que font les directions des forces P, Q, Q', Q'', etc., avec la ligne mn, nous aurons (n° 21)

$$P.\cos.a = Q.\cos.\alpha + Q'.\cos.\alpha' + Q''.\cos.\alpha'' + \text{etc.}$$

Or, si l'on abaisse du point n, pris arbitrairement sur la ligne mn, des perpendiculaires na, nb, nb', nb'', etc., sur les directions des forces P, Q, Q', Q'', etc. ou sur leurs prolongemens ; que l'on désigne par p, q, q', q'', etc., les projections ma, mb, mb', mb'', etc., de la ligne mn, sur ces directions, et par c, la ligne mn : on aura

$$p = c.\cos.a, \quad q = c.\cos.\alpha, \quad q' = c.\cos.\alpha', \text{ etc.}$$

Multipliant donc par c les deux membres de l'équation précédente, il vient

$$Pp = Qq + Q'q' + Q''q'' + \text{etc.} \qquad (b)$$

Si l'on suppose que le point m a été transporté de m en n, et si l'on regarde mn, comme la vitesse virtuelle de ce point, les quantités p, q, q', q'', etc., seront ses vitesses virtuelles, estimées suivant les directions des forces P, Q, Q', Q'', etc. ; l'équation (b) signifie donc que le produit de la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées en un même point,

par la vitesse virtuelle de ce point, estimée suivant la direction de cette résultante, est égal à la somme des produits de ces forces, multipliées par les vitesses virtuelles du même point, estimées suivant leurs directions respectives.

On peut remarquer que pour ce théorème, il n'est pas nécessaire que les vitesses virtuelles soient infiniment petites, car la longueur de la ligne mn est tout-à-fait arbitraire.

168. Pour que les forces Q, Q', Q'', etc., soient en équilibre autour du point m, supposé entièrement libre, il faut que l'on ait $P=0$, ce qui réduit l'équation (b) à celle-ci :

$$Qq + Q'q' + Q''q'' + \text{etc.} = 0;$$

équation qui renferme le principe des vitesses virtuelles, relativement aux forces Q, Q', Q'', etc.

Ce principe a également lieu lorsque le point m, au lieu d'être libre, est assujéti à rester sur une surface ou sur une courbe donnée, pourvu qu'alors les vitesses virtuelles soient infiniment petites. On n'a plus, dans ce cas, $P=0$; mais on a $p=0$, et l'équation (b) se réduit toujours à celle des vitesses virtuelles.

En effet, supposons le point m assujéti à rester sur une surface donnée; il faudra pour l'équilibre, que la résultante P coïncide avec la normale à cette surface, ou qu'elle soit perpendiculaire à son plan tangent; si donc nous communiquons au point m, un mouvement infiniment petit, et qu'en vertu de ce mouvement il soit transporté en n sur la

surface

surface donnée, la projection p de la droite mn, faite sur la direction de P, ou sur la normale au point m, sera nulle; car dans une étendue infiniment petite, la surface coïncide avec son plan tangent, ce qui fait que la ligne mn est comprise dans ce plan, et par conséquent perpendiculaire à la droite sur laquelle on la projette.

Le même raisonnement s'applique au cas où le point m ne peut se mouvoir que sur une courbe donnée : la ligne mn coïncide avec la tangente à cette courbe; elle est donc perpendiculaire à la direction de la force P qui coïncide avec la normale; par conséquent la projection de mn, sur cette direction, est égale à zéro.

Ainsi, le principe des vitesses virtuelles a lieu dans tous les cas d'équilibre que peut présenter un système de forces appliquées en un même point; mais on doit observer que si le point m était simplement posé sur une surface donnée, l'équation des vitesses virtuelles n'aurait pas lieu pour un mouvement infiniment petit, qui éleverait le point m au-dessus de la surface donnée, mais seulement pour tous les déplacemens dans lesquels le point m reste sur cette surface. Cette circonstance donne lieu, comme nous l'avons déjà remarqué (n° 24), à une condition d'équilibre relative à la direction de la résultante P; condition qui ne peut être exprimée par une équation, et qui n'est pas comprise dans le principe des vitesses virtuelles.

169. Essayons présentement d'étendre ce principe

à un système de points matériels m, m', m'', etc., liés entre eux d'une manière quelconque, soit par des droites inflexibles, soit par des fils inextensibles, dont les uns sont fixement attachés à ces points, tandis que les autres viennent les traverser comme des anneaux mobiles. Dans ce dernier cas, les points ou anneaux conservent la liberté de glisser le long des fils qui les traversent, et pour cela, nous supposons ces fils parfaitement flexibles.

Si l'on applique des forces données P, P', P'', etc., aux points m, m', m'', etc., et que l'équilibre s'établisse dans le système; il est clair que les cordons qui joignent ces points deux à deux éprouveront chacun une *tension* particulière, c'est-à-dire, que chacun de ces cordons sera tiré à ses deux extrémités par des forces égales et contraires, dirigées suivant ses prolongemens. L'intensité commune de ces forces sera ici, comme dans le n° 137, la mesure de la tension que ce cordon éprouve. Un cordon qui ne serait pas tendu, ne contribuerait en rien à l'équilibre, et l'on pourrait en faire abstraction.

La tension peut varier en passant d'un cordon à l'autre; mais s'il s'agit de deux cordons qui sont le prolongement l'un de l'autre à travers un anneau, la tension est égale dans les deux, parce qu'ils ne forment qu'un même cordon, qui éprouve nécessairement la même tension dans toute son étendue (n° 139). Ainsi, par exemple, que m soit

un anneau traversé par le cordon $m'mm''$, la tension des deux parties $m'm$ et $m''m$ de ce cordon, sera la même.

Lorsque plusieurs fils viennent se croiser dans un même anneau, la tension est la même dans les deux parties de chaque fil, mais elle peut varier d'un fil à l'autre. Si donc, outre le cordon $m'mm''$, il passe encore un cordon $m'''mm^{\text{IV}}$, dans l'anneau m, la tension sera la même dans les deux parties $m'''m$ et $m^{\text{IV}}m$ de ce dernier fil, et, en général, elle sera différente de celle des deux parties $m'm$ et $m''m$ du premier fil. Et si un autre cordon, tel que $m^{\text{v}}m$, vient aboutir au même anneau m, auquel il soit fixement attaché, ce cordon aura sa tension particulière, différente en général de toutes celles des cordons qui aboutissent au même point.

Observons encore que si m' est un anneau, ainsi que m, et que le fil $m''mm'$, après avoir passé par l'anneau m, passe encore par l'anneau m', pour aller aboutir au point m'''; la tension sera la même dans les trois cordons $m''m$, mm' et $m'm'''$; car alors ces trois cordons n'en font qu'un seul, savoir, $m''mm'm'''$. En général, lorsqu'un même fil est partagé en plusieurs parties, par des anneaux mobiles, la tension est la même dans toutes ses parties.

170. Ce que nous disons ici, par rapport aux fils inextensibles, s'applique également aux droites inflexibles qui joignent deux à deux les points du

système. Il faut se représenter ces droites comme des espèces de fils qui ne peuvent ni s'étendre, ni se contracter, et qui sont, quand l'équilibre existe, ou tirés ou poussés dans le sens de leur longueur par des forces égales et contraires, appliquées à leurs extrémités. L'intensité de ces forces est la mesure de la tension ou de la *contraction* que ces fils éprouvent : s'il en existe dans le système qui ne soient ni tendus ni contractés, ils sont inutiles à l'équilibre, et l'on peut les supprimer. Ainsi, dans ce qui va suivre, nous supposerons tous les liens physiques qui restent dans le système, tendus ou contractés dans le sens de leur longueur par des forces inconnues.

L'avantage du principe des vitesses virtuelles est de donner les équations d'équilibre dans chaque cas particulier, sans qu'on ait besoin de calculer ces tensions; il n'est pas même nécessaire de les connaître pour parvenir à la démonstration rigoureuse de ce principe; mais comme celle que nous allons donner est fondée sur la considération de ces tensions inconnues, voici la notation dont nous ferons usage pour les représenter.

Nous désignerons par $[m, m']$, la tension ou la contraction du fil flexible ou inflexible qui joint deux points quelconques m et m' du système. De cette manière, $[m, m'']$, $[m', m'']$, etc., représenteront les tensions des fils qui joignent m et m'', m' et m'', etc.

171. Nous aurons aussi à considérer les variations infiniment petites qu'éprouvent les distances des points m, m', m'', etc., pris deux à deux, soit quand l'un des points change de position, soit quand les deux points sont déplacés simultanément. Alors nous désignerons par (m, m') la distance de deux points quelconques m et m'; de sorte que (m,m''), (m', m''), (m,m'''), etc., exprimeront les distances de m et m'', m et m''', m et m'''', etc. Nous emploierons la caractéristique $\delta_{,}$, pour indiquer les variations de ces distances relatives à un déplacement infiniment petit du point m; la caractéristique $\delta_{,}'$, pour indiquer celles qui ont lieu quand c'est le point m' que l'on déplace; la caractéristique $\delta_{,}''$, pour indiquer les variations relatives au déplacement de m''; et ainsi de suite. Enfin nous réservons la caractéristique δ, sans accent, pour indiquer la variation de la distance de deux points résultant de leur déplacement simultané.

En supposant, par exemple, que m a été transporté de m en n, et m', de m' en n' (fig. 48), nous aurons.

$$\delta.(m, m') = nn' - mm',$$

$$\delta_{,}.(m, m') = nm' - mm',$$

$$\delta_{,}'.(m', m) = mn' - mm'.$$

Il est important d'observer que la variation totale, indiquée par δ, est égale à la somme des variations partielles, indiquées par $\delta_{,}$ et $\delta_{,}'$; de manière

qu'on a, pour deux points quelconques,

$$\delta.(m,\ m') = \delta_{,}.(m,\ m') + \delta'_{,}.(m',\ m).$$

Cette équation résulte de ce que les déplacemens de m et m' sont supposés infiniment petits, et elle n'a lieu que dans cette hypothèse. En effet (m, m') est une fonction des coordonnées des points m et m'; ces variables prennent des accroissemens infiniment petits, quand les points m et m' sont transportés en n et n'; or, en rejetant les puissances de ces accroissemens, supérieures à la première, il est évident que l'accroissement total de la fonction (m, m'), est égal à la somme des accroissemens partiels qui seraient dus à la variation de chaque coordonnée isolément; par conséquent, la variation totale de (m, m') doit être égale à la somme de ses deux variations partielles, qui répondent aux caractéristiques $\delta_{,}$ et $\delta'_{,}$.

172. Tout ce qui précède étant admis, considérons le point m auquel est appliquée la force donnée P. Ce point est attaché aux autres par les cordons mm', mm'', mm''', etc.; il est donc tiré ou poussé, dans le sens de chacun de ces fils, par une force égale à la tension ou la contraction que ce fil éprouve; de sorte qu'outre la force donnée P, le point m est encore soumis à l'action d'autant d'autres forces qu'il y a de cordons tendus aboutissant en ce point. Après qu'on a eu égard à ces forces de tension, il faut faire abstraction des fils qui lient le point m aux autres points du système, et le considérer comme un point isolé, autour duquel les tensions $[m, m']$,

$[m, m'']$, $[m, m''']$, etc., et la force P doivent se faire équilibre. Si ce point est immobile, il n'en résultera aucune équation de condition; mais s'il est parfaitement libre, ou seulement, s'il est assujéti à rester sur une surface ou sur une courbe donnée, on aura, entre ces forces, l'équation des vitesses virtuelles déjà démontrée pour l'équilibre d'un point isolé.

Pour former cette équation, prenons un point n infiniment voisin de m et appartenant à la surface ou à la courbe sur laquelle le point m est obligé de rester, s'il n'est pas parfaitement libre. Soient p, t, t', t'', etc., les projections de mn, sur les directions des forces P, $[m, m']$, $[m, m'']$, $[m, m''']$, etc.; nous aurons (n° 168)

$$Pp + [m, m'].t + [m, m''].t' + [m, m'''].t'' + \text{etc.} = 0.$$

Mais à cause que la ligne mn est infiniment petite, il est aisé de voir que sa projection sur la ligne mm', n'est autre chose que la différence des deux distances $m'n$ et mm'; car si l'on abaisse du point n (fig. 48), la perpendiculaire na, sur mm', ma sera cette projection, et l'on aura $ma = mm' - am'$; or, $\overline{am'}^2 = \overline{nm'}^2 - \overline{na}^2$; d'où l'on tire $am' = nm'$, en négligeant le carré $\overline{na}^2$, qui est infiniment petit du second ordre; donc $ma = mm' - nm'$. Ainsi, l'on aura, d'après la notation convenue,

$$t = \delta_{,}.(m, m');$$

et par la même raison

$$t' = \delta_{,}.(m,\ m''), \quad t'' = \delta_{,}.(m,\ m'''),\ \text{etc.}$$

L'équation précédente devient donc

$$Pp + [m, m'].\delta_{,}.(m, m') + [m, m''].\delta_{,}.(m, m'') + [m, m'''].\delta_{,}.(m, m''') + \text{etc.} = 0.$$

En considérant les autres points m', m'', m''', etc. du système, on aura pour chacun de ceux qui ne sont pas immobiles, une équation semblable à celle-ci. Ces équations seront

$$P'p' + [m', m].\delta'_{,}.(m', m) + [m', m''].\delta'_{,}.(m', m'') + [m', m'''].\delta'_{,}.(m'', m''') + \text{etc.} = 0,$$
$$P''p'' + [m'', m].\delta''_{,}.(m'', m) + [m'', m'].\delta''_{,}.(m'', m') + [m'', m'''].\delta''_{,}.(m'', m''') + \text{etc.} = 0,$$
$$P'''p''' + [m''', m].\delta'''_{,}.(m''', m) + [m''', m'].\delta'''_{,}.(m''', m') + [m''', m].\delta'''_{,}.(m''', m'') + \text{etc.} = 0,$$
$$\text{etc.};$$

p', p'', p''', etc., exprimant les vitesses virtuelles de m', m'', m''', etc., estimées suivant les directions des forces données P', P'', P''', etc., qui agissent sur ces points.

Ajoutons toutes ces équations : en observant que $[m, m']$ est la même chose que $[m', m]$, et de même pour toutes les notations semblables ; et en substituant la variation totale de chaque distance, à la somme de ses deux variations partielles, nous aurons

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} + [m, m'].\delta.(m, m') + [m, m''].\delta.(m, m'') + [m, m'''].\delta.(m, m''') + \text{etc.} + [m', m''].\delta.(m', m'') + [m', m'''].\delta.(m', m''') + \text{etc.} + [m'', m'''].\delta.(m'', m''') + \text{etc.} = 0. \quad (c)$$

173. Jusqu'ici les déplacemens des points m, m', m'', etc., qui ont produit les vîtesses virtuelles p, p', p'', etc., sont absolument indépendans entre eux; et l'équation (c) suppose seulement que ces points n'ont pas quitté les surfaces ou les courbes données, sur lesquelles ils sont obligés de rester; mais si nous supposons en outre qu'en vertu de ces déplacemens, les points du système qui sont joints par un fil tendu, ont conservé les mêmes distances respectives, nous aurons

$$\delta.(m, m') = 0, \quad \delta.(m, m'') = 0, \quad \text{etc.};$$

et l'équation (c) se réduira à celle-ci

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} = 0,$$

qui est précisément celle des vîtesses virtuelles (n° 163).

Si dans le déplacement des points m, m', m'', etc., ceux qui sont des anneaux ont glissé le long des fils qui les traversent, l'équation des vîtesses virtuelles aura encore lieu, pourvu que les longueurs totales de ces fils n'aient pas varié. Supposons, par exemple, que m est un anneau qui a glissé le long du fil $m'mm''$. Alors on n'a plus séparément

$$\delta.(m, m') = 0, \quad \delta.(m\ m'') = 0;$$

mais on a toujours

$$\delta.(m,m')+\delta.(m,m'')=0,$$

à cause de l'inextensibité du fil $m'mm''$; or, les deux fils $m'm$ et $m''m$ n'en faisant qu'un seul dans ce cas, les tensions $[m, m']$ et $[m, m'']$, sont égales (nº 168): les deux termes qui renferment ces tensions dans l'équation (c), peuvent donc s'écrire ainsi :

$$[m,m'].[\delta.(m,m')+\delta.(m,m'')],$$

et par conséquent ils se détruisent.

En général on conçoit que si un fil flexible passe à travers un nombre quelconque d'anneaux, les tensions égales des différentes parties de ce fil disparaîtront dans l'équation (c), toutes les fois que la variation de la longueur totale du fil sera nulle.

Concluons donc enfin, 1°. que l'équation des vitesses virtuelles a lieu pour tous les mouvemens infiniment petits que l'on peut donner à un corps solide, libre ou gêné par des obstacles fixes; car dans tous ces mouvemens, les distances respectives des points du corps restent les mêmes.

2°. Que cette équation a aussi lieu pour tous les mouvemens infiniment petits que peut prendre un système de points ou d'anneaux liés par des fils flexibles, pourvu que ces fils restent droits et tendus. Quand cette condition n'est pas remplie, les tensions ne disparaissent pas toutes dans l'équation (c),

et par conséquent l'équation des vitesses virtuelles n'a plus lieu.

174. Cette démonstration du principe des vitesses virtuelles est un développement de celle que M. Laplace a donnée dans le 1er livre de la *Mécanique céleste*, pour un système de points liés entre eux d'une manière invariable. Nous l'avons étendue au cas où ces points ou plusieurs d'entre eux, conservent la liberté de glisser le long des fils flexibles qui les unissent. Quand il sera question de l'équilibre des fluides, nous ferons voir, en partant de leur propriété fondamentale, que cette démonstration s'applique aussi à un système de forces qui réagissent les unes sur les autres, par l'intermédiaire d'un fluide incompressible, contenu dans un canal, ou dans un vase de forme quelconque. Par ce moyen, notre démonstration aura toute la généralité que l'on peut demander ; car les droites inflexibles, les fils flexibles et inextensibles, les fluides renfermés dans des canaux, sont les seuls moyens physiques existans, qui soient propres à lier entre eux des points matériels, et à modifier l'action des forces qui leur sont appliquées : en supposant que parmi ces points il en existe d'immobiles, d'autres parfaitement libres, d'autres assujétis à rester sur des surfaces ou sur des courbes données, on a le système de corps le plus général que l'on puisse avoir besoin de considérer. Si l'on établissait entre ces points une liaison arbitraire, qui ne résultât pas d'une

combinaison quelconque de ces différens moyens, cette liaison ne pouvant se réaliser physiquement, il serait inutile de chercher les conditions d'équilibre d'un pareil système.

175. Il nous reste encore à faire voir que réciproquement quand l'équation

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} = 0, \qquad (a)$$

a lieu pour tous les mouvemens infiniment petits que l'on peut communiquer au système des points m, m', m'', etc., les forces P, P', P'', etc., sont en équilibre, ainsi que nous l'avons énoncé précédemment (n° 163).

Supposons donc, pour un moment, que l'équilibre n'ait pas lieu. Les points m, m', m'', etc., ou une partie de ces points, se mettront en mouvement, et dans le premier instant ils décriront des droites infiniment petites, telles que mn, $m'n'$, $m''n''$, etc. (fig. 44); on pourra donc réduire tous ces points au repos en leur appliquant des forces convenables, dirigées suivant les prolongemens de ces lignes, en sens contraire des mouvemens produits ; par conséquent, si nous désignons ces forces inconnues par R, R', R'', etc., l'équilibre aura lieu entre les forces P, P', P'', etc., R, R', R'', etc.; de sorte que r, r', r'', etc., étant les vitesses virtuelles de m, m', m'', etc., estimées suivant les directions des nouvelles forces R, R', R'', etc., on aura, d'après

le principe des vitesses virtuelles qui vient d'être démontré,

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} + Rr + R'r' + R''r'' + \text{etc.} = o;$$

équation que la précédente réduit à

$$Rr + R'r' + R''r'' + \text{etc.} = o.$$

Cette équation ayant lieu pour tous les mouvemens que l'on peut donner au système des points m, m', m'', etc., nous pouvons choisir, pour les vitesses virtuelles de ces points, les espaces réellement décrits mn, $m'n'$, $m''n''$, etc.; mais comme ces lignes sont comptées sur les prolongemens des directions de R, R', R'', etc., il s'ensuit (n° 163) que toutes les quantités r, r', r'', etc., seront négatives et égales, abstraction faite du signe, à ces mêmes lignes mn, $m'n'$, $m''n''$, etc. Alors tous les termes de la dernière équation étant de même signe, leur somme ne peut être nulle, à moins que chaque terme ne soit séparément égal à zéro. On aura donc

$$R.mn = o, \quad R'.m'n' = o, \quad R''.m''n'' = o, \text{ etc.}$$

Or, pour que le produit $R.mn$ soit nul, il faut qu'on ait, ou $R = o$, ou $mn = o$; ce qui signifie, dans l'un et l'autre cas, que le point m ne peut prendre aucun mouvement : il en est de même de tous les autres points; par conséquent le système entier est en équilibre; et c'est ce que nous nous proposions de démontrer.

176. Le centre de gravité d'un système de corps pesans, liés entre eux d'une manière quelconque, est en général le plus haut ou le plus bas qu'il est possible, quand ces corps sont en équilibre. Ce théorème remarquable est une conséquence immédiate du principe des vitesses virtuelles.

En effet, supposons que m, m', m'', etc., sont les centres de gravité de différens corps, dont les poids sont les forces P, P', P'', etc., appliquées à ces points; abaissons de tous ces points des perpendiculaires z, z', z'', etc., sur un plan horizontal, choisi arbitrairement; ces droites représenteront les directions des forces P, P', P'', etc.; leurs longueurs varieront quand on communiquera au système un mouvement infiniment petit; et il est clair que leurs accroissemens positifs ou négatifs exprimeront les vitesses virtuelles des points m, m', m'', etc., estimées suivant les directions de ces forces, c'est-à-dire, les quantités p, p', p'', etc. La somme

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.}$$

sera donc l'accroissement de la quantité

$$Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.},$$

correspondant au mouvement communiqué; or, en vertu du principe des vitesses virtuelles, cet accroissement est égal à zéro, lorsque les poids P, P', P'', etc., sont en équilibre; donc alors, la

quantité $Pz + P'z' +$ etc. est un *maximum* ou un *minimum*, ainsi qu'il résulte de la règle connue, d'après laquelle on détermine les plus grandes et les plus petites valeurs des quantités variables. Mais on a (n° 99.)

$$Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.} = \Pi z_{,},$$

en désignant par Π la somme des poids P, P', P'', etc., et par $z_{,}$ l'ordonnée verticale du centre de gravité du système entier : cette ordonnée est donc un *maximum* ou un *minimum*, quand le système est en équilibre ; et par conséquent, dans cet état, le centre de gravité est le plus haut ou le plus bas qu'il est possible.

177. Il suit de ce théorème qu'entre toutes les courbes d'une longueur donnée, qui passent par les points de suspension d'une chaînette, cette courbe est celle dont le centre de gravité est le plus bas. En partant de cette propriété, et en faisant usage du *calcul des variations*, on obtient la même équation de la chaînette que nous avons déjà trouvée (n° 144). Comme on sait d'avance que cette courbe doit être plane, on simplifiera le calcul en prenant son plan pour celui des coordonnées. Soit donc KnK' (fig. 38), la courbe cherchée ; prenons l'horizontale Kx, pour l'axe des abscisses, et la verticale Ky pour celui des ordonnées ; désignons par l, la longueur donnée de cette courbe, et par $y_{,}$ l'ordonnée de son centre

de gravité, nous aurons (n° 103)

$$l = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad ly_{,} = \int y . \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

ces intégrales étant prises depuis le point K, jusqu'au point K'. Il faut donc que dans la courbe cherchée, l'intégrale $\int y . \sqrt{dx^2 + dy^2}$, soit un *maximum* entre toutes les courbes que l'on peut mener par les points donnés K et K', et qui ont la même longueur l; or, si nous considérons la somme $\int y . \sqrt{dx^2 + dy^2} + g . \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$, où g désigne une constante indéterminée, et si nous trouvons une courbe dans laquelle cette somme soit un *maximum* entre toutes les courbes possibles, passant par les points K et K', il est évident que pour cette même courbe, l'intégrale $\int y . \sqrt{dx^2 + dy^2}$ sera un *maximum*, relativement à toutes les courbes de même longueur ; par conséquent, si nous déterminons la quantité g, qui entrera dans l'équation de cette courbe, de manière qu'on ait $\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = l$, cette équation deviendra celle de la courbe demandée. C'est en considérant ainsi la somme de deux ou d'un plus grand nombre d'intégrales, que l'on ramène les *maxima relatifs* de ces intégrales, à des *maxima absolus* (*).

Considérons x comme fonction de y, ce qui

(*) Voyez le *Traité Élementaire du calcul différentiel*, de M. Lacroix.

rendra

rendra les calculs plus simples, et faisons, pour un moment,

$$(y+g).\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}=V;$$

nous aurons

$$\int y.\sqrt{dx^2+dy^2}+g.\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int Vdy,$$

et, pour l'équation du *maximum*,

$$\int\delta V.dy=0.$$

Cette variation δV devrait être prise par rapport à x et à $\frac{dx}{dy}$, dont les variations sont δx et $\frac{d.\delta x}{dy}$; mais comme V ne contient point x, la valeur de δV se réduit à

$$\delta V=\frac{(y+g).\frac{dx}{dy}}{\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}}.\frac{d.\delta x}{dy}.$$

Multipliant par dy, et intégrant par parties, afin de faire disparaître $d.\delta x$, il vient

$$\int\delta V.dy=\frac{(y+g).dx}{\sqrt{dy^2+dx^2}}.\delta x-\int\delta x.d.\left[\frac{(y+g).dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right].$$

La variation δx est nulle aux deux limites de l'intégrale, puisqu'elles se rapportent aux points K et K', qui sont fixes et donnés de position; le terme hors du signe $\int$, disparaît donc dans cette valeur de $\int\delta V.dy$; et en égalant à zéro le coëffi-

cient de δx, sous le signe $\int$, on a pour l'équation de la courbe demandée,

$$d.\left[\frac{(y+g).dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right]=0, \quad \text{ou} \quad \frac{(y+g).dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=C,$$

C étant une constante arbitraire. Si l'on appelle c, l'angle que fait la tangente au point K, origine des coordonnées, avec l'axe des x, on aura à la fois $y=0$ et $\frac{dy}{dx}=\text{tang}.c$; d'où il résulte $C=g.\cos.c$; l'équation de la courbe devient donc

$$(y+g).dx=g.\cos.c.\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

On voit qu'elle a la même forme que l'équation (2) du n° 144, avec laquelle elle coïncide en prenant $g=-\frac{A}{h}$, ce qui est permis, puisque g et A sont des constantes indéterminées. On achèvera l'intégration et l'on déterminera les constantes, de la même manière que dans ce n° et dans les suivans.

178. Quoiqu'il soit vrai de dire qu'un système de corps pesans reste en repos, quand son centre de gravité est le plus bas, et quand il est à sa plus grande hauteur; cependant ces deux états d'équilibre diffèrent essentiellement l'un de l'autre; et pour en montrer la différence, il convient d'expliquer ici ce qu'on entend par la *stabilité* de l'équilibre.

Un système de corps est dans une position d'équi-

libre stable, lorsqu'en l'écartant un tant soit peu de cette position, il tend de lui-même à y revenir, en faisant de part et d'autre des oscillations très-petites. Dans la nature, ces oscillations sont bientôt anéanties par les frottemens et les résistances de tout genre que les corps éprouvent, et le système reprend la position d'équilibre d'où on l'a écarté.

Cela posé, l'équilibre d'un système de corps pesans est *stable*, lorsque son centre de gravité est le plus bas qu'il peut être; au contraire, il n'est qu'*instantané*, quand le centre de gravité est le plus haut; c'est-à-dire, que si l'on vient dans ce dernier cas, à écarter le système un tant soit peu de la position d'équilibre, au lieu de tendre à y revenir, il s'en éloigne de plus en plus.

Cette différence des deux états ne peut se démontrer d'une manière générale, qu'en déterminant l'espèce de mouvement que prend un système de corps pesans, infiniment peu écarté de sa position d'équilibre; par conséquent cette démonstration appartient à la dynamique. Mais on peut citer beaucoup de cas d'équilibre où cette différence est évidente en elle-même : par exemple, si l'on considère un corps pesant, retenu par un point fixe, ce corps sera en équilibre lorsque son centre de gravité se trouvera sur la verticale menée par le point de suspension, au-dessus ou au-dessous de ce point : au-dessous, il sera le plus bas qu'il peut être; au-dessus, il sera le plus haut; or, il est évident que dans le premier cas, l'équilibre est stable, et que dans le second, il n'est qu'instantané. Un

cylindre pesant et homogène, à base elliptique, est en équilibre, étant couché sur un plan horizontal, lorsqu'il touche ce plan, suivant l'arête menée par un des sommets de sa base; si l'arête de contact est menée par un sommet du petit axe, la distance du centre de gravité au plan horizontal, est un *minimum;* cette distance est, au contraire, un *maximum,* quand l'arête de contact correspond à un sommet du grand axe; or, il est encore évident que l'équilibre est stable dans le premier cas, et instantané dans le second. Si l'arête de contact ne passe pas par un des sommets de la base, il n'y a ni *maximum,* ni *minimum;* et aussi, dans une semblable position, le cylindre ne reste point en équilibre.

FIN DU PREMIER LIVRE.

LIVRE SECOND.

DYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

DU MOUVEMENT RECTILIGNE D'UN POINT MATÉRIEL.

§. I. *Mouvement uniforme.*

179. Le mouvement le plus simple que puisse prendre un point matériel, est celui qui se fait en ligne droite, et dans lequel le mobile parcourt des espaces égaux en temps égaux. C'est ce mouvement qu'on appelle *uniforme*; et l'on nomme *vitesse*, le rapport constant des espaces parcourus aux tems écoulés depuis l'origine du mouvement, ou, ce qui est la même chose, l'espace parcouru dans l'unité de tems.

Un mouvement uniforme diffère d'un autre mouvement de la même espèce, par la grandeur de la vitesse qui doit être donnée pour chaque mouvement en particulier. En désignant par a la vitesse, par t le tems écoulé depuis un instant déterminé, par e l'espace parcouru par le mobile pendant ce

tems t, on aura évidemment, d'après la définition de la vîtesse,

$$\frac{e}{t} = a, \quad \text{ou} \quad e = at.$$

Mais on peut donner à cette équation une forme un peu plus générale, qui permette de comparer entre eux les mouvemens de plusieurs corps qui ne partent pas du même point.

Pour cela, supposons que e désigne à un instant quelconque, la distance du mobile à un point fixe C (fig. 49), choisi arbitrairement sur la droite AB qu'il décrit en allant de A vers B. Soit D le point où se trouve le mobile, à l'instant déterminé d'où l'on compte le tems t; représentons par b, la distance CD, et conservons toujours a pour désigner la vîtesse: $e-b$ sera l'espace parcouru pendant le tems t; par conséquent on aura $\frac{e-b}{t} = a$; d'où l'on tire

$$e = at + b. \qquad (1)$$

Observons que quand une équation contient des quantités de différentes espèces, comme ici le tems t et les lignes e, a, b, ces quantités ne sont autre chose que des nombres abstraits qui marquent leurs rapports à des unités de l'espèce de chacune d'elles. C'est la remarque que nous avons déjà eu occasion de faire dans le n° 94, et que nous répétons maintenant une fois pour toutes.

La variable t peut être positive ou négative; ses valeurs positives se rapportent à des époques postérieures à l'instant d'où l'on compte le tems, et ses va-

leurs négatives, à des époques antérieures au même instant. De même, les valeurs positives de la variable e devront être comptées, à partir du point B, de C vers B, et ses valeurs négatives, à partir du même point, de C vers A. De cette manière, l'équation (1) fera connaître, pour tous les instans possibles, la position du mobile sur la droite indéfinie AB.

180. Si nous considérons un autre point matériel, qui se meuve uniformément sur la même droite, avec une vitesse a', et qui soit en D' à l'instant d'où l'on compte le tems t, l'équation de son mouvement sera

$$e' = a't + b';$$

e' représentant sa distance variable au point fixe C, et b', la distance CD'. Dans cette équation, la vitesse a' sera positive ou négative, selon que ce second mobile marchera de A vers B, comme le premier, ou en sens contraire, c'est-à-dire, de B vers A.

Au moyen de cette équation, combinée avec la précédente, on résoudra sans difficulté tous les problèmes qui se rapportent au mouvement relatif des deux mobiles. Si l'on demande, par exemple, à quel instant ils se rencontreront, il est clair qu'à cet instant ils seront à la même distance du point C; on aura donc $e = e'$, ou

$$at + b = a't + b';$$

ce qui donne

$$t = \frac{b' - b}{a - a'}.$$

Lorsque cette valeur de t sera négative, il en faudra conclure que la rencontre des deux mobiles a eu lieu avant l'instant d'où l'on compte le tems ; elle aura lieu après cet instant, quand la valeur de t sera positive. Dans le cas de $a = a'$, on aura $t = \frac{1}{0}$, ce qui signifie que les deux mobiles ne se rencontreront jamais, et ne se sont jamais rencontrés ; ce qui est évident en soi-même, puisqu'ils marchent dans le même sens, avec des vitesses égales.

181. Lorsqu'on est certain que le mouvement d'un corps est uniforme, ce mouvement fournit le moyen le plus naturel de mesurer le tems, qui est alors proportionnel aux espaces parcourus par le mobile. Mais pour s'assurer de l'uniformité du mouvement qui doit servir de mesure au tems, il est évident qu'il faut en avoir une autre mesure, indépendante de ce mouvement. Or, si l'on a une suite de mouvemens qui s'achèvent tous en tems égaux, on peut prendre leur durée commune pour unité de tems, et le nombre de ces mouvemens successifs deviendra la mesure du tems, rapportée à cette unité. Nous ne supposons pas que l'on connaisse la loi suivant laquelle ces mouvemens s'exécutent ; car il se présente sans peine à l'esprit une infinité de cas où, sans connaître cette loi, on peut néanmoins assurer que tous ces mouvemens s'achèvent en tems égaux. Nous n'en citerons ici aucun exemple, parce qu'il ne s'agit pas d'entrer dans le détail des différens moyens qu'on pourrait employer à la mesure du tems ; mais seulement de

faire voir que cette mesure n'est pas essentiellement fondée sur la considération du mouvement uniforme ; de manière qu'on peut, sans commettre un cercle vicieux, faire entrer la notion du tems dans la définition de ce mouvement.

182. Si un corps, après avoir parcouru un certain espace dans un tems déterminé, parcourt ensuite un espace plus grand dans un tems égal, nous disons que son mouvement s'est *accéléré*; nous disons, au contraire, qu'il s'est *ralenti*, quand le second espace est plus petit que le premier ; or, de même que ce corps n'a pu se mettre en mouvement sans l'action d'une force (n° 1), de même aussi il est incapable, sans le secours d'une nouvelle force, d'accélérer ou de ralentir le mouvement qu'il a reçu, ou d'en changer la direction. Un point matériel mis en mouvement par l'action d'une force, et ensuite abandonné à lui-même, se meut donc indéfiniment en ligne droite ; il décrit toujours le même espace dans le même intervalle de tems, ou autrement dit, il se meut d'un mouvement uniforme, dans la direction de la force qui l'a mis en mouvement. L'intensité de cette force détermine la vitesse du mouvement produit; de sorte que la force changeant, le mouvement reste uniforme, mais l'espace parcouru dans l'unité de tems devient ou plus grand ou plus petit.

Cette impossibilité où sont tous les corps de changer leur état de mouvement ou de repos, sans le secours d'une cause particulière qui agit sur eux

à cet instant, est une des propriétés générales de la matière, qu'on appelle l'*inertie*. Elle est pour nous un résultat de l'expérience et de l'analogie, sur lequel il ne peut rester aucun doute. En effet, nous voyons les corps persévérer de plus en plus dans leur mouvement, à mesure que nous prenons soin de diminuer les obstacles, tels que les frottemens et les résistances des fluides, qui altèrent ce mouvement et finissent par l'anéantir. L'analogie nous conduit donc à conclure que si nous parvenions à faire disparaître entièrement ces obstacles, nous verrions les corps mis en mouvement par une force, conserver ce mouvement sans aucune altération, jusqu'à ce qu'une nouvelle force vînt détruire ou changer l'effet de la première. L'inertie de la matière est principalement remarquable dans le mouvement des corps célestes, qui subsiste depuis un tems dont nous ne saurions assigner la limite, et dans lequel cependant les observations les plus précises n'ont pu faire découvrir aucune altération.

§. II. *Mouvement uniformément varié.*

183. Il existe dans la nature deux espèces distinctes de forces. Les unes agissent sur les corps pendant un tems inappréciable; aussitôt après cette action presqu'instantanée, elles abandonnent le mobile à lui-même; par conséquent ces forces produisent toujours un mouvement rectiligne et uniforme. Les forces de l'autre espèce agissent sans interruption sur

le mobile, pendant toute la durée de son mouvement. Si cette action continue s'exerce toujours suivant la même ligne droite, le mouvement produit est rectiligne; mais les espaces parcourus en tems égaux, ne sont point égaux, quelque petits que soient ces intervalles de tems; de sorte que ce mouvement n'est ni uniforme, ni un assemblage de mouvemens uniformes qui se succèdent dans la même direction. Nous examinerons dans la suite, le cas où la direction de la force varie sans cesse pendant le mouvement, et où le mobile décrit en conséquence une ligne courbe; il ne sera question dans ce chapitre, que du mouvement *rectiligne* d'un point matériel.

184. Nous appellerons en général *mouvemens variés*, ceux dans lesquels le rapport des espaces parcourus aux tems employés à les parcourir, varie continuellement; et *forces accélératrices*, les forces qui produisent de semblables mouvemens par leur action non interrompue sur le mobile.

Pour se représenter plus aisément un mouvement varié, on peut partager le tems en une infinité d'intervalles infiniment petits, et supposer que la force agit sur le mobile au commencement de chaque instant. Alors le mouvement sera uniforme pendant la durée de ces intervalles; le mouvement varié, quel qu'il soit, sera donc remplacé par une suite de mouvemens uniformes, dont les durées seront infiniment petites, et dont les vîtesses seront toutes différentes entre elles.

En décomposant ainsi un mouvement varié en une infinité de mouvemens uniformes, on simplifiera



beaucoup les démonstrations et les calculs; et les résultats auxquels on parviendra par ce moyen, n'en auront pas moins le degré de certitude que l'on a droit d'exiger. Cette manière d'envisager les mouvemens variés, est analogue à ce qu'on fait en géométrie, quand on substitue aux courbes continues, des polygones d'une infinité de côtés infiniment petits.

185. Lorsqu'un corps se meut d'un mouvement varié, si l'on supprimait à un instant quelconque la force accélératrice, le mouvement deviendrait uniforme; or, la vitesse du mouvement uniforme qui succéderait dans ce moment au mouvement varié, est ce qu'on appelle la *vitesse acquise* par le mobile, ou simplement la *vitesse* du mobile à cet instant. Cette vitesse dépend évidemment du tems pendant lequel la force accélératrice a agi sur le mobile, et de la nature de cette force. Dans chaque espèce de mouvement, la vitesse est donc une certaine fonction du tems écoulé depuis que le corps a commencé de se mouvoir. Après le cas d'une vitesse constante, qui donne le mouvement uniforme, le plus simple est celui dans lequel la vitesse croît ou décroît par degrés égaux. Le mouvement est uniformément accéléré ou retardé, selon que la vitesse augmente ou diminue. Pour comprendre ces deux cas en une seule dénomination, nous nommerons *uniformément variés*, les mouvemens dans lesquels la vitesse varie proportionnellement au tems.

La force qui produit un mouvement de cette espèce, sera pour nous une force accélératrice *constante*; car elle agit constamment de la même

manière sur le mobile, dont elle augmente ou diminue la vîtesse d'une quantité égale en tems égaux, pendant toute la durée du mouvement.

186. Proposons-nous de déterminer en fonction du tems, l'espace parcouru par un mobile qui se meut d'un mouvement uniformément varié. Soient e cet espace, t le tems, v la vîtesse au bout du tems t; désignons aussi par a la vîtesse initiale, et par g la quantité constante dont la vîtesse augmente dans chaque unité de tems; de sorte que a soit la vîtesse à l'origine du mouvement; $a+g$, la vîtesse à la fin de la première unité de tems; $a+2g$, $a+3g$, etc., à la fin de la deuxième, de la troisième, etc., nous aurons, à la fin du tems t,

$$v=a+gt. \quad (1)$$

Si l'on suppose que t augmente d'une quantité infiniment petite, et devienne $t+dt$, e deviendra $e+de$, et la différentielle de exprimera l'espace parcouru dans le tems infiniment petit dt. En considérant donc, pendant cet instant, le mouvement comme uniforme, et dû à la vîtesse v dont le mobile est animé à la fin du tems t, il vient

$$de=vdt, \quad \text{ou} \quad de=adt+gtdt;$$

d'où l'on tire, en intégrant

$$e=b+at+\frac{gt^2}{2}; \quad (2)$$

b étant une constante arbitraire, qui dépend de la

position du mobile à l'instant où l'on fixe l'origine du tems, et pour lequel on a $t=0$. Ainsi, en supposant que le mobile se meuve sur la ligne AB (fig. 49), que e exprime sa distance variable au point C, pris arbitrairement sur cette ligne, et que D soit le lieu du mobile à l'instant dont nous parlons, on aura $b=CD$. Au reste, lorsqu'on ne considère qu'un seul mobile, on est maître de supposer $b=0$ dans l'équation de son mouvement, puisque cela revient à compter l'espace e, à partir du lieu du mobile à l'origine du tems.

187. Ces équations (1) et (2) renferment toute la théorie du mouvement uniformément varié.

Quand la quantité g sera positive, ce mouvement sera accéléré; il sera retardé quand g sera négative. Lorsqu'on aura $g=0$, le mouvement deviendra uniforme.

En supposant nulle, la vitesse initiale a, et en prenant aussi pour simplifier, $b=0$, on aura

$$e=\frac{gt^2}{2}.$$

Alors le corps partira du repos, et le mouvement sera produit par la seule action de la force accélératrice constante; or, on voit que dans ce cas, l'espace parcouru croît comme le carré du tems employé à le parcourir.

On voit aussi que l'espace $\frac{g}{2}$, parcouru dans la première unité de tems, est la moitié de la vitesse g,

acquise à la fin de cette unité ; et comme on peut prendre pour unité, tel intervalle de tems qu'on voudra, il en résulte qu'une *force accélératrice constante communique à un mobile dans un tems quelconque, une vitesse double de l'espace qu'elle lui a fait parcourir dans ce même tems.*

188. La chute des corps pesans dans le vide, nous offre un exemple d'un mouvement uniformément accéléré. L'expérience a démontré que les espaces qu'ils parcourent sont proportionnels aux carrés des tems, tandis que les vitesses qu'ils acquièrent sont simplement proportionnelles aux tems (*). La pesanteur est donc une force accélératrice constante ; et si l'on prend la seconde pour unité de tems, il suffira de connaître l'espace qu'un corps parcourt dans la 1re seconde de sa chute, pour être en état de déterminer toutes les circonstances du mouvement de ce corps. Or, on a trouvé, par des expériences faites avec une extrême précision, et que nous ferons bientôt connaître, que cet espace est le même pour tous les corps, qu'il varie avec la latitude, et qu'à celle de Paris, il est égal à $4^{m},9044$.

En faisant donc

$$\tfrac{1}{2}g = 4^{m},9044, \quad \text{ou} \quad g = 9^{m},8088,$$

(*) On rend sensible en physique, la loi des espaces parcourus et celle des vitesses acquises, par les corps graves, au moyen d'un appareil connu sous le nom de *Machine d'Athood*, et dont nous donnerons la théorie dans le livre suivant.

dans les formules

$$v = gt, \quad e = \frac{gt^2}{2},$$

elles feront connaître, après un nombre quelconque de secondes, la vitesse du mobile et la hauteur d'où il est tombé; et réciproquement, on en déduira le tems de la chute du corps, lorsque la valeur de v ou celle de h sera donnée. Que je sache, par exemple, qu'un corps pesant a acquis une vitesse de 100^{m}, en tombant dans le vide, d'une hauteur inconnue; je divise cette vitesse par la valeur de g, et j'ai le tems de la chute, exprimé en secondes, savoir 10″, 2. De même, si l'on sait qu'un corps est tombé d'une hauteur de 50^{m}, et qu'on demande le tems de la chute; on divisera le double de cette hauteur par la valeur de g, on extraira ensuite la racine carrée du quotient, et le résultat exprimera le nombre de secondes, contenu dans le tems demandé: on trouve, dans ce cas, $t = 3''$, 2.

189. Si on élimine t entre les deux équations précédentes, il vient

$$v = \sqrt{2ge};$$

ce qui donne la vitesse acquise par le mobile, quand il est tombé d'une hauteur égale à e. Comme on a souvent occasion de faire usage de cette vitesse, on l'appelle, pour abréger, *la vitesse due à une hauteur donnée.*

Soit, par exemple, $e = 50^{m}$; nous aurons

$$v = \sqrt{(100^{m}.).(9^{m},8088)} = 31^{m},32;$$

nous

nous dirons donc que $31^m,32$, est la vitesse due à une hauteur de 50^m, la seconde étant l'unité de tems à laquelle cette vitesse est rapportée.

190. L'action de la pesanteur sur un corps, est indépendante de la vitesse dont il est déjà animé dans le sens de cette force ; car elle lui communique des vitesses égales en tems égaux, à toutes les époques du mouvement, quoiqu'à ces différentes époques, le corps soit animé de vitesses différentes. Si cette action ne dépend pas de la grandeur de la vitesse du mobile, il est naturel de penser qu'elle ne dépend pas davantage de sa direction ; en supposant donc un corps lancé verticalemeut de bas en haut, la pesanteur doit diminuer continuellement la vitesse, par les mêmes degrés qu'elle l'augmenterait pendant la chute de ce corps ; c'est-à-dire, que si l'on désigne sa vitesse initiale par a, sa vitesse à la fin de la 1re seconde, sera $a-g$; à la fin de la 2e, $a-2g$; à la fin de la 3e, $a-3g$, etc. ; g ayant la même valeur numérique que dans le numéro précédent. C'est, en effet, ce que l'expérience confirme : ainsi le mouvement d'un corps pesant, lancé verticalement de bas en haut, sera donné par les équations (1) et (2) du n° 186, dans lesquelles il suffira de changer le signe de g. Si l'on y fait aussi, pour simplifier, $b=0$, on aura

$$v=a-gt, \quad e=at-\frac{gt^2}{2}.$$

Le corps s'élevera jusqu'à ce que sa vitesse soit

devenue nulle; en désignant donc par h la plus grande hauteur à laquelle il parviendra, et par θ, le tems qu'il emploiera pour y parvenir, nous aurons

$$o = a - g\theta, \quad h = a\theta - \frac{g\theta^2}{2};$$

d'où l'on tire

$$\theta = \frac{a}{g}, \quad h = \frac{a^2}{2g}.$$

Parvenu à ce point, le corps retombera vers la terre; et si l'on demande la vitesse qu'il acquerra, en parcourant dans sa chute toute la hauteur h, on aura, pour la vitesse due à cette hauteur,

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{a^2} = a.$$

Le mobile, quand il sera revenu à son point de départ, aura donc repris une vitesse égale à sa vitesse de projection; d'où l'on conclut que *pour élever un corps à une hauteur donnée, il faut lui imprimer une vitesse égale à celle qu'il acquerrait en tombant de cette hauteur.*

Ainsi, d'après l'exemple du n° précédent, si un corps pesant est lancé de bas en haut, avec une vitesse de $31^m,32$ par seconde, il s'élevera à une hauteur de 50 mètres; et quand il sera retombé de cette hauteur, sa vitesse sera redevenue égale à $31^m,32$.

191. Considérons maintenant le mouvement d'un

point matériel pesant, sur un plan incliné. La pesanteur se décompose en deux forces, l'une perpendiculaire au plan, l'autre dirigée suivant ce plan; la première est détruite, et c'est la seconde qui produit le mouvement. Mais cette composante de la pesanteur produira-t-elle, comme la pesanteur elle-même, un mouvement uniformément accéléré, et quel sera le rapport de la vitesse communiquée dans chaque unité de tems, par la composante, à la vitesse qui serait communiquée dans le même tems par la pesanteur? On conçoit que pour répondre à ces questions, il faut connaître la loi que suivent les vitesses, quand les intensités des forces qui les produisent, varient dans un rapport donné; or, c'est un principe généralement admis, que les vitesses communiquées en tems égaux à un même corps, par des forces différentes, sont entre elles comme les intensités de ces forces. Si donc la pesanteur décomposée suivant le plan incliné, est la moitié, par exemple, de la pesanteur absolue, la vitesse communiquée par la première force, dans un tems quelconque, sera la moitié de la vitesse qui serait produite par la seconde force, dans le même tems; par conséquent, le mouvement sur le plan incliné sera uniformément accéléré, et la vitesse acquise dans chaque unité de tems, sera égale à la moitié de la quantité désignée précédemment par g. Relativement à un plan quelconque, dont la hauteur est h et la longueur l, on a déjà vu (n° 98) que la pe-

santeur décomposée suivant ce plan, est à la pesanteur absolue, comme h est à l; en substituant donc $g.\frac{h}{l}$ à la place de g, dans les équations du mouvement vertical d'un corps pesant, on aura les équations de son mouvement sur un plan incliné, savoir :

$$e=\frac{gh}{2l}.t^2, \qquad v=\frac{gh}{l}.t,$$

et celle-ci :

$$v=\sqrt{\frac{2ghe}{l}},$$

qui résulte de l'élimination de t, entre les deux premières.

Si l'on veut connaître le tems qu'il emploie pour parvenir au point le plus bas, et la vitesse acquise en ce point, il faut supposer $e=l$; ce qui donne

$$t=\sqrt{\frac{2l^2}{gh}}, \qquad v=\sqrt{2gh}$$

192. Cette valeur de v fait voir que la vitesse acquise, quand le corps a parcouru toute la longueur du plan incliné, est la même que s'il fût tombé verticalement de la hauteur du plan; de manière que si l'on a une suite de droites CA, CB, CD, CE (fig. 50), partant d'un même point, et aboutissant à un même plan horizontal, les points matériels pesans qui glissent sur ces droites, et qui partent ensemble du point C, auront tous acquis

des vitesses égales, lorsqu'ils seront parvenus à ce plan horizontal.

On peut aussi conclure de la valeur de t, que toutes les cordes, telles que CA, CA', CA'' (fig. 51), inscrites dans un même cercle, et aboutissant à une même extrémité d'un diamètre vertical, sont décrites dans le même tems par des corps pesans qui partent ensemble du point C. Car en supposant que l soit la longueur de la corde CA, en désignant par b celle du diamètre vertical CB, et en menant la droite horizontale AD, la hauteur h sera, dans ce cas, la partie CD de ce diamètre, et l'on aura, d'après une propriété du cercle, $l^2 = bh$; ce qui réduit la valeur précédente de t, à

$$t = \sqrt{\frac{2b}{g}};$$

quantité indépendante de la longueur de la corde CA, et qui exprime le tems de la chute par le diamètre CB.

Les cordes AB, $A'B$, $A''B$, qui aboutissent à son autre extrémité B, sont aussi parcourues dans le même tems que ce diamètre, par des points matériels pesans, partant ensemble, sans vitesses initiales, des points A, A', A''.

193. La loi des vitesses proportionnelles aux forces qui les produisent, dont nous venons de faire usage, est un principe fondamental de la dy-

namique. A proprement parler, cette loi n'est qu'une hypothèse ; car, de ce que nous entendons par le rapport numérique des forces (n° 4), nous ne pouvons rien conclure relativement aux vitesses qu'elles produisent. Nous disons, par exemple, qu'une force est double d'une autre, quand la première est formée par la réunion de deux forces égales à la seconde, agissant simultanément et dans le même sens, sur un point matériel ; or, il ne s'ensuit pas nécessairement que cette force double doive communiquer au mobile, une vitesse précisément double de celle que la force simple lui communiquerait dans le même tems.

La vitesse communiquée à un mobile, par une force qui agit sur lui pendant un tems déterminé, est une fonction du nombre qui représente l'intensité de cette force ; le peu de données que nous avons sur la nature des forces, ne nous permet pas de déterminer *à priori* la forme de cette fonction ; nous sommes donc obligés, pour résoudre les problèmes de dynamique, de partir d'une supposition ; et nous choisissons la plus simple, en regardant la vitesse comme proportionnelle à la force. L'accord des résultats qui se déduisent de cette hypothèse, avec l'expérience, prouve ensuite que cette loi la plus simple, est effectivement celle de la nature. Au reste, cette loi et l'inertie de la matière sont les deux seules hypothèses sur lesquelles toute la dynamique est fondée ; mais, à cet égard, la théorie du mouve-

ment est moins étendue que celle de l'équilibre, car celle-ci ne dépend absolument d'aucune supposition. En effet, il n'est pas nécessaire pour résoudre les problèmes de statique, de connaître les vîtesses que des forces qui ont entre elles un rapport donné, pourraient communiquer à leurs points d'application : il suffit de connaître ce rapport numérique, tel qu'il a été défini dans le n° 4, et les directions de ces forces.

194. Lorsque deux forces sont appliquées à un même point matériel, et que le rapport numérique de ces forces est donné, on en conclut celui des vîtesses qu'elles communiqueraient dans le même tems à ce point ; c'est ce qui arrive quand elles proviennent de la décomposition d'une autre force : le rapport des intensités des composantes, comparées entre elles, ou de l'une des composantes comparée à la résultante, est donné par la règle du parallélogramme des forces ; connaissant donc la vîtesse que la résultante communiquerait au mobile, dans l'unité de tems, on en déduira immédiatement la vîtesse qui serait due à l'une des deux composantes, ainsi qu'on vient de le voir relativement à la composante de la pesanteur dirigée suivant un plan incliné.

Quand, au contraire, les vîtesses communiquées par deux forces, à un même mobile et dans un même tems, sont connues, leur rapport donne celui de ces forces. C'est ainsi, par exemple, qu'on a déter-

miné par l'expérience, la loi de la pesanteur à la surface de la terre. L'observation fait connaître, sous les différens parallèles, la hauteur d'où les corps tombent dans la 1re seconde de leur chute; en doublant cette hauteur, on a la vitesse acquise à la fin de ce tems, ou la mesure de la pesanteur à ces différentes latitudes; or, on a trouvé de cette manière que si l'on appelle g la pesanteur en un lieu dont la latitude est de 50°, et g' la pesanteur en un autre lieu quelconque dont la latitude est représentée par ψ, la valeur de g' est donnée par cette formule

$$g'=g(1-0,002837.\cos.2\psi).$$

Au pôle, on a $\psi=100°$ et $g'=g\,(1+0,002837)$; à l'équateur, $\psi=0$ et $g'=g\,(1-0,002837)$; donc l'accroissement de la pesanteur, dans l'étendue entière du quart du méridien, est égal à $2g.(0,002837)$, c'est-à-dire, à environ $\frac{1}{176}$ de sa valeur moyenne.

195. Non-seulement la loi des forces proportionnelles aux vitesses a lieu pour les forces accélératrices, mais elle s'applique également aux forces qui agissent sur les corps pendant un tems dont la durée est inappréciable. Deux forces de cette espèce sont entre elles comme les vitesses qu'elles communiqueraient à un même corps, si elles agissaient successivement sur lui.

Il est bon d'observer que si l'on voulait compa-

rer une force de cette espèce avec une force accélératrice, il faudrait prendre les vîtesses produites par ces deux forces dans un même intervalle de tems; or, la première n'agissant que pendant un tems qu'on peut regarder comme infiniment petit, il faudrait prendre les vîtesses produites par la seconde, pendant un tems qui fût aussi infiniment petit; et comme cette vîtesse se trouve infiniment petite, tandis que la vîtesse produite par la première force est toujours une quantité finie, il en résulte que cette force instantanée, ou que nous regardons comme telle, est infinie par rapport à celle dont l'action est continue; ou plutôt, ces deux forces ne sont pas de même nature, et ne peuvent être comparées numériquement.

§. III. *Formules générales du mouvement varié.*

196. Lorsque l'intensité d'une force accélératrice varie pendant le tems qu'elle agit sur le mobile, la vîtesse acquise dans chaque unité de tems est variable comme cette intensité, et le mouvement produit n'est plus uniformément varié. Les forces qui dépendent à chaque instant de la vîtesse actuelle du mobile, telles que la résistance des fluides et le frottement, nous offrent des exemples de forces accélératrices variables. Il en est de même de la pesanteur, quand les corps pesans tombent d'une grande hauteur, et que l'on veut tenir compte de la variation continuelle de la gravité, due à leur rapprochement du centre de la terre. Le mou-

vement du corps dépend de la loi suivant laquelle la force accélératrice varie ; et dans un mouvement quelconque, l'espace parcouru, la vîtesse acquise à chaque instant, et la force accélératrice, sont trois fonctions du tems qui sont liées entre elles, comme on va le voir.

197. Représentons le tems par t, l'espace parcouru par e, la vîtesse acquise par v, et par φ la force accélératrice. On verra sans peine, comme dans le n° 186, que v est égal au coefficient différentiel $\frac{de}{dt}$; mais il ne sera pas inutile de montrer comment on parvient à ce résultat par la considération des limites.

Pour cela, partageons le tems t en un nombre indéterminé de parties égales ; soit n ce nombre, et faisons, pour abréger, $\frac{t}{n} = \theta$. Supposons qu'une force agisse sur le mobile au commencement de chacun de ces intervalles de tems égaux, et qu'elle lui communique, chaque fois qu'elle agit sur lui, une vîtesse finie, qui s'ajoute à celle dont le mobile est déjà animé. Désignons par a la vîtesse communiquée au commencement du premier intervalle de tems, par a' la vîtesse communiquée au commencement du second, par a'' la vîtesse communiquée au commencement du troisième, et ainsi de suite, jusqu'à $a^{(n-1)}$ qui désignera la vîtesse communiquée au commencement du $n^{ième}$, ou du dernier intervalle de tems.

Le mouvement restant uniforme pendant la durée

de chaque intervalle de tems, et les vitesses successives du mobile étant a, $a+a'$, $a+a'+a''$, etc., nous aurons $a\theta$, $(a+a').\theta$, $(a+a'+a'').\theta$, etc., pour les espaces parcourus dans le premier, le second, le troisième, etc., intervalle ; d'où nous concluons que l'espace parcouru dans le tems entier $n\theta$, ou la somme de tous ces espaces, est égal à

$$a.n\theta+a'.(n-1)\theta+a''.(n-2)\theta.....+a^{(n-1)}.\theta.$$

La vitesse du mobile à la fin de ce tems est égale à

$$a+a'+a''.....+a^{(n-1)};$$

l'espace qui serait parcouru en vertu de cette vitesse, d'un mouvement uniforme et pendant le tems $n\theta$, serait donc

$$a.n\theta+a'.n\theta+a''.n\theta.....+a^{(n-1)}.n\theta;$$

or, on voit qu'il est plus grand que le précédent, pourvu que l'on suppose positives, toutes les vitesses $a', a''... a^{(n-1)}$, ajoutées successivement à la vitesse initiale a, ou, ce qui est la même chose, pourvu que le mouvement du corps soit accéléré pendant toute la durée du tems $n\theta$.

Ainsi dans tout mouvement accéléré, l'espace parcouru pendant un tems quelconque est plus petit que celui qui serait parcouru uniformément dans un tems égal, en vertu de la vitesse acquise par le mobile à la fin de ce tems; et comme ce résultat est indépendant de la grandeur de l'intervalle qui sépare les actions successives de la force, il s'en-

suit qu'on doit l'étendre au cas où l'action de la force est continue, et où la vitesse du mobile varie par degrés insensibles. Nous savions déjà (n° 187), que dans le mouvement uniformément accéléré, l'un de ces espaces est toujours la moitié de l'autre.

Cela posé, soit Ft la fonction du tems qui représente l'espace e; si le tems devient $t+t'$, cette fonction deviendra $F(t+t')$, et l'on aura $F(t+t')-Ft$, pour l'espace parcouru pendant le tems t'. Or, on peut donner à t' une valeur assez petite pour que le mouvement soit toujours accéléré ou toujours retardé, pendant la durée de ce tems. Supposons, par exemple, que le mouvement soit toujours accéléré, et désignons par u la vitesse gagnée par le mobile pendant le tems t', de manière que $v+u$ soit sa vitesse à la fin du tems $t+t'$, puisque v est sa vitesse à la fin du tems t : d'après ce qu'on vient de prouver, on aura

$$F(t+t')-Ft < vt'+ut'.$$

D'ailleurs le mouvement étant toujours accéléré pendant le tems t', l'espace $F(t+t')-Ft$ est évidemment plus grand que celui qui serait parcouru en vertu de la seule vitesse v; on aura donc aussi

$$F(t+t')-Ft > vt';$$

d'où il suit que pour des valeurs de t' que l'on peut prendre aussi petites que l'on voudra, la valeur de la fonction

$$\frac{F(t+t')-Ft}{t'},$$

est comprise entre les quantités v et $v+u$. Mais si l'on suppose que t' diminue indéfiniment, il résulte de ce que la vitesse du mobile varie par degrés insensibles, que son accroissement u correspondant au tems t', diminuera de même indéfiniment, et pourra devenir plus petit que toute quantité donnée; la quantité v, constante par rapport à t', est donc la limite de la fonction précédente; or, on sait que cette limite est en général le coefficient différentiel de la fonction Ft, ou $\frac{de}{dt}$; par conséquent on aura $\frac{de}{dt} = v$, comme on voulait le prouver.

198. Pour avoir la mesure de la force accélératrice que nous avons désignée par φ, il faut la comparer à une force accélératrice connue. Or, quand on compare deux forces accélératrices constantes, elles sont entre elles comme les vitesses qu'elles communiquent à un même corps pendant un même tems, que l'on peut alors choisir arbitrairement; mais si l'une des deux forces que l'on compare est une force accélératrice variable, il est évident qu'il faudra prendre les vitesses produites dans un intervalle de tems infiniment petit, afin qu'on puisse regarder l'intensité de cette force comme constante pendant cet instant. Soit donc p, une force accélératrice constante qui communique au mobile, une vitesse g dans l'unité de tems; gdt sera la vitesse due à cette force pendant l'instant dt; mais pendant le même instant, la force φ produit une vitesse dv; car la vitesse du mobile étant v, à

la fin du tems t, et $v+dv$ à la fin du tems $t+dt$, dv est la vîtesse produite pendant le tems dt; on aura donc

$$\varphi : p :: dv : gdt;$$

d'où l'on tire

$$\varphi = \frac{p}{g} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

On simplifiera cette expression en supposant que p est la force que l'on prend pour unité, et que g est aussi égale à l'unité linéaire; ce qui revient à prendre pour unité de force, celle qui produit dans l'unité de tems, une vîtesse égale à l'unité de longueur. De cette manière la valeur de φ se réduit à

$$\varphi = \frac{dv}{dt};$$

et si l'on y substitue la valeur de v, trouvée dans le n° précédent, on aura aussi

$$\varphi = \frac{d^2e}{dt^2}.$$

La force que l'on prend pour unite, et à laquelle on compare l'intensité de la force φ, dépend du choix que l'on fera de l'unité de longueur et de l'unité de tems. Si l'on veut, par exemple, que la pesanteur soit l'unité de force, il n'y aura qu'à prendre la seconde pour unité de tems, et faire l'unité linéaire égale à $9^m,8088^m$ (n° 188). Alors en exprimant, au moyen de ces unités, le tems et les quantités linéaires qui entrent dans $\frac{dv}{dt}$ ou dans $\frac{d^2e}{dt^2}$, ces expressions pour-

ront être converties en nombres abstraits, qui exprimeront à chaque instant, le rapport de la force φ à la pesanteur.

Il serait facile de trouver ces valeurs de φ, en faisant usage de la méthode des limites ; mais comme le raisonnement ne serait qu'une répétition de celui du n° précédent, nous croyons inutile de nous y arrêter.

§. IV. *Application des formules générales à différens problèmes.*

199. Lorsque la force accélératrice qui agit sur un mobile est donnée en fonction du tems, les équations

$$\varphi = \frac{dv}{dt}, \qquad \varphi = \frac{d^2e}{dt^2},$$

font connaître, par de simples intégrations, la vitesse acquise et l'espace parcouru à chaque instant. Mais ordinairement cette force est donnée, soit en fonction de l'espace parcouru, soit en fonction de la vitesse acquise, soit même en fonction de l'un et de l'autre; et alors ces deux équations deviennent des équations différentielles du premier et du second ordre, dont il faut trouver les intégrales; ce qui présente souvent des difficultés insurmontables. Voici néanmoins plusieurs problèmes importans, dans lesquels les intégrations peuvent s'effectuer d'une manière complète.

Quoique ces formules ne conviennent qu'à des

points matériels isolés, cependant les conséquences qu'on en déduira pourront s'appliquer à des corps d'une dimension quelconque, en supposant que tous leurs points décrivent, d'un même mouvement, des droites parallèles, et que chacun de ces points se meut de la même manière que s'il était isolé et indépendant des autres.

Ier. PROBLÈME.

200. *Déterminer le mouvement vertical d'un point matériel pesant, en ayant égard à la variation de la pesanteur.*

Soient r le rayon de la terre, g la pesanteur à sa surface, a la distance du mobile au centre de la terre, à l'instant où le mouvement commence; quand il aura parcouru un espace e, en tombant vers la terre, sa distance au centre sera $a-e$; par conséquent sa pesanteur, ou la force accélératrice φ qui agit sur lui, sera donnée par cette proportion

$$\varphi : g :: r^2 : (a-e)^2;$$

car on sait que l'intensité de la pesanteur, sur une même verticale, suit la raison inverse du carré de la distance du corps pesant au centre de la terre On aura donc

$$\varphi = \frac{gr^2}{(a-e)^2};$$

ce qui donne, pour l'équation du mouvement,

$$\frac{d^2e}{dt^2} = \frac{gr^2}{(a-e)^2}.$$

Pour

Pour intégrer cette équation, je multiplie ses deux membres par $2de$; j'ai alors

$$\frac{2de.d^2e}{dt^2} = d.\frac{de^2}{dt^2} = 2gr^2.\frac{de}{(a-e)^2},$$

et en intégrant

$$\frac{de^2}{dt^2} = C + \frac{2gr^2}{a-e};$$

C étant la constante arbitraire. Si l'on suppose la vîtesse nulle à l'origine du mouvement, on aura à la fois $e=0$ et $\frac{de}{dt}=0$; d'où il résulte, pour déterminer C,

$$0 = C + \frac{2gr^2}{a}.$$

Retranchant cette équation de la précédente, il vient

$$\frac{de^2}{dt^2} = \frac{2gr^2}{a-e} - \frac{2gr^2}{a};$$

et comme $\frac{de}{dt}=v$, on aura, en réduisant,

$$v^2 = \frac{2gr^2}{a}.\frac{e}{a-e}; \qquad (1)$$

équation qui donne la vîtesse v du mobile, en chaque point de la verticale qu'il décrit.

Si l'on résout l'équation précédente par rapport à dt, on trouve

$$dt = \frac{1}{r}.\sqrt{\frac{a}{2g}}.\frac{a-e}{\sqrt{ae-e^2}}.de;$$

expression qu'on peut mettre sous cette forme :

$$dt=\frac{1}{r}\cdot\sqrt{\frac{a}{2g}}\cdot\left[\frac{(\frac{1}{2}a-e).de}{\sqrt{ae-e^2}}+\frac{1}{2}.a.\frac{de}{\sqrt{\frac{1}{4}.a^2-(\frac{1}{2}a-e)^2}}\right],$$

et d'où l'on tire, en intégrant,

$$t=\frac{1}{r}\cdot\sqrt{\frac{a}{2g}}\cdot\left[\sqrt{ae-e^2}+\frac{a}{2}.\text{arc.}\left(\cos.=\frac{a-2e}{a}\right)\right]. \qquad (2)$$

Je n'ajoute pas de constante arbitraire, ou plutôt je la suppose nulle, parce que je compte le tems t à partir de l'origine du mouvement, de manière qu'on ait $t=0$, quand $e=0$.

Cette équation donne immédiatement le tems en fonction de l'espace parcouru. En la résolvant par rapport à e, on aura cet espace en fonction du tems; mais la valeur de e sera exprimée par une série infinie. Les équations (1) et (2) renferment la solution complète du problème proposé.

201. Lorsque le mobile ne tombe pas d'une très-grande hauteur, e est très-petit par rapport à a, et a diffère très-peu de r; l'équation (1) se réduit donc, à très-peu près, à

$$v^2=2ge, \quad \text{ou} \quad v=\sqrt{2ge}.$$

Quant à l'équation (2), j'observe que

$$\text{arc.}\left(\cos.=\frac{a-2e}{a}\right)=\text{arc.}\left(\sin.=2.\sqrt{\frac{ae-e^2}{a^2}}\right);$$

or, le sinus $2.\sqrt{\frac{ae-e^2}{a^2}}$ étant très-petit, l'arc qui

lui correspond, est sensiblement égal à ce sinus; d'ailleurs, nous pouvons négliger le carré e^2, par rapport au produit ae, et si nous mettons de plus r à la place de a, l'équation (2) se réduit à

$$t=\frac{1}{r}.\sqrt{\frac{r}{2g}}.2\sqrt{re}=\sqrt{\frac{2e}{g}};$$

d'où l'on tire

$$e=\frac{g}{2}.t^2.$$

Ces valeurs de e et de v, sont en effet celles qui ont lieu dans le mouvement des corps pesans qui tombent d'une petite hauteur, ce qui permet de regarder la pesanteur comme une force accélératrice constante (n° 188).

202. Si le mobile, après avoir atteint la surface de la terre, pénétrait dans son intérieur, la nature du mouvement changerait, parce que la loi de la pesanteur n'est pas la même dans l'intérieur et hors du sphéroïde terrestre. Ainsi, par exemple, le mouvement des corps pesans dans les mines d'une grande profondeur ne doit pas être déterminé par les formules précédentes, quand on veut avoir égard à la variation de la pesanteur. Cette force est, dans ce cas, proportionnelle à la distance au centre de la terre, et constamment dirigée vers ce point. Concevons donc un point matériel pesant qui se meuve suivant un rayon terrestre; soient toujours r la longueur de ce rayon, et g l'intensité de la pesanteur à la surface; appelons e la distance variable du mobile à cette surface;

19..

$r-e$ sera sa distance au centre, et la pesanteur à cette distance, sera exprimée par $\frac{g}{r}.(r-e)$: c'est l'expression de la force accélératrice du mobile; on a donc pour l'équation de son mouvement

$$\varphi = \frac{d^2e}{dt^2} = \frac{g}{r}.(r-e).$$

multipliant par $2de$, et intégrant il vient

$$\frac{de^2}{dt^2} = v^2 = -\frac{g}{r}.(r-e)^2 + C;$$

v étant la vîtesse, et C, une constante arbitraire. Je la détermine en supposant que le mobile parte de l'extrémité du rayon sans vîtesse initiale, de manière qu'on ait à la fois $e=0$ et $v=0$; d'où il résulte $C=gr$, et par conséquent

$$v^2 = \frac{g}{r}.[r^2-(r-e)^2];$$

équation qui fait connaître la vîtesse en un point quelconque de l'espace parcouru.

En faisant $e=r$, il vient $v=\sqrt{gr}$, pour la vîtesse acquise par le mobile quand il a parcouru le rayon entier. Il est évident que cette vîtesse doit être plus petite que si la pesanteur, au lieu de décroître, fût restée constante et égale à g, pendant toute la durée du mouvement; et en effet, dans cette hypothèse, elle serait égale à $\sqrt{2gr}$, quantité plus grande que l'autre dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1. Parvenu au centre, le mobile dépassera ce point en vertu de sa vîtesse acquise; lorsqu'il aura parcouru le diamètre entier, on

aura $e=2r$, ce qui donne $v=0$; sa vitesse sera donc nulle à l'extrémité du diamètre, comme à l'origine de son mouvement; par conséquent le mobile reviendra vers le centre, et il parcourra le diamètre une seconde fois, en sens contraire de la première. Ce second mouvement sera identiquement le même que le premier. Le mobile se retrouvera à son premier point de départ, avec une vitesse nulle; puis il parcourra une seconde fois le diamètre, et l'on conçoit qu'il fera ainsi, de part et d'autre du centre, une suite infinie d'oscillations qui seront toutes d'égale durée, c'est-à-dire, qu'il emploiera toujours le même tems à parcourir le diamètre entier.

203. Pour avoir la valeur de e en fonction de t, je mets dans la dernière équation, $\frac{de}{dt}$ à la place de v; en la résolvant ensuite par rapport à dt, il vient

$$\sqrt{\frac{g}{r}}.dt=\frac{de}{\sqrt{r^2-(r-e)^2}};$$

et en intégrant, on a

$$\sqrt{\frac{g}{r}}.t=\text{arc.}\left(\cos.=\frac{r-e}{r}\right).$$

La constante arbitraire est nulle, parce que je suppose qu'on ait $t=0$, quand $e=0$. En renversant cette formule, on en déduit la valeur demandée de e, savoir :

$$e=r-r.\cos.\left(\sqrt{\frac{g}{r}}.t\right).$$

Si on la substitue dans celle de v, on aura aussi la vîtesse en fonction du tems ; ainsi l'on connaîtra à chaque instant l'espace parcouru et la vîtesse acquise par le mobile.

La supposition $e=r$ donne

$$\sqrt{\frac{g}{r}}.t=\text{arc.}(\cos.=0)=\frac{\pi}{2},$$

π désignant la demi-circonférence; donc le tems que le mobile emploie à parcourir le rayon entier, est égal à $\frac{\pi}{2}.\sqrt{\frac{r}{g}}$. Il emploie un tems double à parcourir le diamètre; car en faisant $e=2r$, on a

$$\sqrt{\frac{g}{r}}.t=\text{arc.}(\cos.=-1)=\pi, \quad \text{ou} \quad t=\pi.\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

II. PROBLÈME.

204. *Déterminer le mouvement rectiligne d'un point matériel, attiré vers deux centres fixes, en supposant l'attraction en raison inverse du carré des distances.*

Pour fixer les idées, considérons le cas où le mobile se meut entre les deux centres, sur la droite qui les joint ; soit AB, cette droite (fig. 49), l sa longueur, e la distance variable du mobile au point A, et par conséquent $l-e$, sa distance au point D : nous pourrons représenter les deux attractions par $\frac{a^2}{e^2}$ et $\frac{b^2}{(l-e)^2}$, a^2 et b^2 étant deux coefficiens constans et positifs, qui désignent les intensités de ces forces à l'unité de distance, intensités qui peuvent

être entre elles dans tel rapport qu'on voudra. La force accélératrice qui sollicite le mobile, n'est autre chose que l'excès de la force $\frac{b^2}{(l-e)^2}$ sur la force $\frac{a^2}{e^2}$; l'équation de son mouvement sera donc

$$\varphi=\frac{d^2e}{dt^2}=\frac{b^2}{(l-e)^2}-\frac{a^2}{e^2};$$

d'où l'on tire, en multipliant par $2de$ et intégrant,

$$\frac{de^2}{dt^2}=v^2=\frac{2b^2}{l-e}+\frac{2a^2}{e}+c; \qquad (1)$$

v étant la vitesse du mobile, et c la constante arbitraire. Pour la déterminer, je suppose qu'on ait à l'origine du mouvement $e=\alpha$ et $v=k$; j'ai alors

$$k^2=\frac{2b^2}{l-\alpha}+\frac{2a^2}{\alpha}+c; \qquad (2)$$

et en retranchant cette équation de la précédente, il vient

$$v^2-k^2=\frac{2b^2}{l-e}-\frac{2b^2}{l-\alpha}+\frac{2a^2}{e}-\frac{2a^2}{\alpha}.$$

Nous connaîtrons donc, au moyen de cette équation, la valeur de v en fonction de e, ou la vitesse du mobile en chaque point de la droite qu'il décrit.

205. Il existe un certain point C sur cette droite, où les deux attractions sont égales; si l'on désigne par l' sa distance au point A, on aura

$$\frac{b^2}{(l-l')^2}=\frac{a^2}{l'^2};$$

équation qui donne deux valeurs de l', dont l'une se rapporte au point C, et l'autre à un second point d'égale attraction, situé sur le prolongement de la droite AB; b étant la plus grande des deux quantités et a étant b, la valeur qui se rapporte au point C est

$$l' = \frac{la}{b+a}.$$

Tant qu'on aura $e < l'$, l'attraction du centre A l'emportera sur celle de B; dès que l'on aura $e > l'$, la seconde attraction surpassera la première. Or, supposons $\alpha < l'$, de manière que le mobile soit parti d'un point situé entre A et C, et supposons aussi que la vitesse initiale k était dirigée de A vers C; il est évident qu'il peut arriver deux cas : ou la valeur de v deviendra nulle avant que le mobile ait atteint le point C, ou le contraire aura lieu ; dans le premier cas, le mobile parvenu au point où la vitesse est nulle, retombera vers le point A; dans le second cas, il dépassera le point C, et il parcourra la droite entière AB.

Si l'on demande la plus petite valeur de k, nécessaire pour que le mobile atteigne le point C, on la déterminera en supposant qu'on ait $v = 0$, quand $e = l'$; ce qui donne

$$-k^2 = \frac{2b^2}{l-l'} - \frac{2b^2}{l-\alpha} + \frac{2a^2}{l'} - \frac{2a^2}{\alpha};$$

substituant pour l', sa valeur, on trouve, toute réduction faite,

$$k = \sqrt{\frac{2a^2}{\alpha} + \frac{2b^2}{l-\alpha} - \frac{2(b+a)^2}{l}}.$$

Le point de départ du mobile restant le même, il dépassera le point C toutes les fois que la vitesse initiale sera plus grande que cette valeur de k, et il ne l'atteindra pas toutes les fois qu'elle sera plus petite. Si elle était précisément égale à cette valeur, le mobile atteindrait le point C; la vitesse y serait égale à zéro; et comme les deux forces qui le sollicitent en ce point, sont égales et contraires, il y resterait en équilibre.

206. Maintenant il nous reste à déterminer la valeur de e en fonction de t, ou de t en fonction de e. Pour cela, je résous l'équation (1) par rapport à dt, ce qui donne

$$dt = \frac{\sqrt{el - e^2}.de}{\sqrt{2a^2l + (2b^2 - 2a^2 + cl).e - ce^2}}.$$

En général, cette formule n'est point intégrable sous forme finie, par les règles connues; elle ne l'est que dans le cas particulier où le trinome $2a^2l + (2b^2 - 2a^2 + cl).e - ce^2$ est un carré, ce qui exige qu'on ait

$$(2b^2 - 2a^2 + cl)^2 = -8a^2cl,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$c^2l^2 + 4cl(b^2 + a^2) + 4(b^2 - a^2)^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$c = \frac{-2(a \pm b)^2}{l}.$$

Substituant cette double valeur de c dans l'équa-

tion (2), on en déduit

$$k = \sqrt{\frac{2a^2}{\alpha} + \frac{2b^2}{l - \alpha} - \frac{2(b+a)^2}{l}},$$

ou

$$k = \sqrt{\frac{2a^2}{\alpha} + \frac{2b^2}{l - \alpha} - \frac{2(b-a)^2}{l}}.$$

Ce n'est donc que pour l'une ou l'autre de ces deux valeurs de la vitesse initiale que l'on peut assigner sous forme finie, la relation des deux variables e et t. La première est la limite des vitesses pour lesquelles le mobile ne dépasse pas le point C; la seconde est évidemment plus grande que cette limite; de sorte qu'en l'adoptant, on peut être certain que le mobile parcourra la droite entière AB; mais on n'est pas obligé de choisir entre ces deux vitesses, et la valeur de dt s'intègre également dans l'un et l'autre cas.

En effet, je substitue dans cette formule, à la place de c, sa double valeur; je trouve

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2}} \cdot \frac{\sqrt{le - e^2} . de}{\alpha l - (a \pm b) . e}.$$

Soit, pour la rendre rationnelle,

$$le - e^2 = e^2 x^2, \quad e = \frac{l}{1 + x^2}, \quad de = \frac{-2lxdx}{(1 + x^2)^2};$$

on aura, par rapport à cette nouvelle variable x,

$$dt = -\sqrt{2l^3} . \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^2 . (\alpha x^2 \mp b)},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$dt = \frac{-\sqrt{2l^3}}{(a \pm b)^2} \cdot \left[\frac{(a \mp bx^2).dx}{(1+x^2)^2} \pm \frac{abdx}{ax^2 \mp b} \right],$$

où l'on doit prendre ensemble tous les signes supérieurs, et ensemble tous les signes inférieurs. Or, on a

$$\int \frac{(a \mp bx^2).dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\frac{1}{2}(a \pm b)x}{1+x^2} + \tfrac{1}{2}(a \mp b).\text{arc.}(\text{tang.} = x),$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 - b} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}.\log.\left(\frac{x\sqrt{a} - \sqrt{b}}{x\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right),$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + b} = \frac{1}{\sqrt{ab}}.\text{arc.}\left(\text{tang.} = x.\sqrt{\frac{a}{b}}\right);$$

d'où l'on conclut, dans le cas des signes supérieurs,

$$t = -\frac{\sqrt{2l^3}}{(a+b)^2}\left[\frac{\frac{1}{2}(a+b)x}{1+x^2} + \tfrac{1}{2}(a-b).\text{arc.}(\text{tang.} = x) + \tfrac{1}{2}.\sqrt{ab}.\log.\left(\frac{x\sqrt{a} - \sqrt{b}}{x\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right)\right] + C,$$

et dans le cas des signes inférieurs,

$$t = -\frac{\sqrt{2l^3}}{(a-b)^2}.\left[\frac{\frac{1}{2}(a-b)x}{1+x^2} + \tfrac{1}{2}(a+b).\text{arc.}(\text{tang.} = x) - \sqrt{ab}.\text{arc.}\left(\text{tang.}\, x.\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\right] + C'.$$

En remettant dans ces formules, pour x, sa valeur en e, savoir :

$$x = \frac{\sqrt{le - e^2}}{e},$$

on aura, pour l'un et l'autre cas, la valeur de t en

fonction de e : on déterminera les constantes arbitraires C et C', en supposant $t=0$ à l'origine du mouvement, c'est-à-dire, quand $e=\alpha$.

III. PROBLÈME.

207. *Déterminer le mouvement vertical d'un corps pesant, en ayant égard à la résistance de l'air, supposée proportionnelle au carré de la vîtesse.*

Il faut distinguer deux cas : celui où le corps tombe, et celui où il est lancé verticalement de bas en haut. Examinons d'abord le premier.

La force accélératrice φ, est alors la différence de deux forces qui agissent constamment sur le mobile, en sens contraire l'un de l'autre, savoir, la pesanteur et la résistance du milieu dans lequel le corps est en mouvement. Celle-ci est une force variable qui dépend de la vîtesse du mobile, et qu'on regarde généralement comme proportionnelle au carré de cette vîtesse. Nous la représenterons par mv^2, m étant un coefficient constant pour un même corps et pour un même milieu, mais variable avec la forme du corps, sa densité est celle du milieu. Si le corps tombait d'un grande hauteur, m varierait à raison du changement de densité des couches de l'atmosphère; mais dans une petite hauteur on peut regarder l'air comme un fluide homogène, et considérer m comme une quantité constante. Nous regarderons aussi la pesanteur comme une force constante, et en la désignant par g, nous aurons

$$\varphi=g-m.v^2;$$

d'où il résulte, pour l'équation du mouvement,

$$\frac{dv}{dt}=g-m.v^2.$$

Pour l'intégrer, je la mets sous cette forme,

$$dt=\frac{dv}{g-mv^2}=\frac{1}{2\sqrt{g}}.\left[\frac{dv}{\sqrt{g}+v.\sqrt{m}}+\frac{dv}{\sqrt{g}-v.\sqrt{m}}\right];$$

ce qui donne, en intégrant,

$$2\sqrt{gm}.t=\log.\left(\frac{\sqrt{g}+v.\sqrt{m}}{\sqrt{g}-v.\sqrt{m}}\right).$$

Je n'ajoute pas de constante arbitraire, parce que je suppose nulle la vitesse initiale du corps, et que je compte le tems t à partir de l'origine du mouvement, de manière qu'on ait à la fois $t=o$ et $v=o$; condition remplie par cette formule.

En passant des logarithmes aux nombres, et en désignant par ε la base du système dont le module est l'unité, il vient

$$\frac{\sqrt{g}-v.\sqrt{m}}{\sqrt{g}+v.\sqrt{m}}=\varepsilon^{-2\sqrt{gm}.t}; \qquad (1)$$

équation qui fera connaître la vitesse du mobile à chaque instant.

Pour déterminer l'espace parcouru, on a

$$de=vdt=\frac{vdv}{g-mv^2};$$

intégrant et déterminant la constante arbitraire, de

manière que l'on ait en même tems $v=0$ et $e=0$, on trouve

$$-2me=\log.\left(1-\frac{mv^2}{g}\right); \qquad (2)$$

et comme v est donnée en fonction de t, par l'équation (1), celle-ci donnera de même en fonction de t, la valeur de e. Ainsi la solution complète du problème proposé est renfermée dans ces deux équations.

208. A mesure que le tems augmente, l'exponentielle qui entre dans l'équation (1) diminue; de sorte qu'après un tems plus ou moins court, suivant que le coefficient $2\sqrt{gm}$ est plus ou moins grand, la valeur de cette exponentielle est sensiblement nulle; et alors l'équation (1) donne

$$\sqrt{g}-v.\sqrt{m}=0, \quad \text{ou} \quad v=\sqrt{\frac{g}{m}}.$$

Il s'ensuit donc que le mouvement d'un corps pesant qui tombe dans un fluide homogène, tend continuellement à devenir uniforme; ce qui provient de ce que la résistance du milieu détruit sans cesse l'accélération due à la gravité.

La vitesse constante de son mouvement final est, comme on voit, en raison inverse de la racine carrée du coefficient m, qui exprime l'intensité de cette résistance; or, nous montrerons dans la suite que ce coefficient est proportionnel à la densité du fluide, et que pour des corps de figure semblable, par exemple, pour des sphères, il est en raison inverse du rayon et de la densité du corps; de sorte qu'en

désignant le rayon par r, la densité du corps par D, et celle du fluide par D', on a

$$m = \frac{\mu D'}{Dr};$$

μ étant une quantité dont la valeur sera la même pour tous les corps sphériques, mais qui ne peut être déterminée que par l'expérience. La vitesse finale devient donc

$$v = \sqrt{\frac{gDr}{\mu D'}}.$$

Toutes choses d'ailleurs égales, cette valeur est proportionnelle à la racine carrée de la densité du mobile ; d'où l'on voit qu'en ayant égard à la résistance de l'air, les corps les plus denses doivent tomber le plus vite, tandis que dans le vide, tous les corps tombent avec la même vitesse ; ce qui est conforme à l'expérience.

209. Si nous supposons la résistance du milieu égale à zéro, nous devons retrouver le mouvement uniformément accéléré des corps pesans qui tombent dans le vide ; mais en faisant $m=0$ dans les équations (1) et (2), elles deviennent identiques, et les valeurs de v et de e restent inconnues.

On peut cependant en déduire ces valeurs ; et pour cela, j'observe que l'équation (1) peut s'écrire ainsi

$$(1+\varepsilon^{-2\sqrt{gm}\,.\,t}).v.\sqrt{m} = (1-\varepsilon^{-2\sqrt{gm}\,.\,t}).\sqrt{g};$$

d'ailleurs on a, en développant l'exponentielle

$e^{-\sqrt{gm}.t}$, suivant la série connue,

$$e^{-2\sqrt{gm}.t}=1-2\sqrt{gm}.t+\frac{4gm}{2}.t^2-\text{etc.};$$

substituant cette valeur dans le second membre de notre équation, il vient

$$(1+e^{-2\sqrt{gm}.t}).v.\sqrt{m}=(2\sqrt{gm}.t-2gm.t^2+\text{etc.}).\sqrt{g}.$$

Maintenant le facteur $\sqrt{m}$ est en évidence dans tous les termes de l'équation ; en supprimant ce facteur commun, et faisant ensuite $m=0$, l'équation ne devient plus identique : elle se réduit à $v=gt$.

D'après la série connue qui donne le développement du logarithme, on a

$$\log.\left(1-\frac{mv^2}{g}\right)=-\frac{mv^2}{g}-\frac{m^2v^4}{2g^2}-\frac{m^3v^6}{3g^3}-\text{etc.};$$

substituant cette valeur dans l'équation (2), divisant tous ses termes par m, et faisant ensuite $m=0$, elle se réduit à $2e=\frac{v^2}{g}$; donc, à cause de $v=gt$, on aura $e=\frac{g}{2}.t^2$.

Ces valeurs de v et de e sont celles qu'il fallait trouver.

210. Considérons maintenant un corps lancé verticalement de bas en haut. Dans ce cas, la pesanteur et la résistance de l'air agissent dans le même sens, et en sens contraire de la vîtesse initiale;

tiale; on a donc, en conservant les dénominations précédentes,

$$\varphi = -g - m.v^2,$$

et, pour l'équation du mouvement

$$\frac{dv}{dt} = -g - mv^2;$$

d'où l'on tire

$$-dt = \frac{dv}{g + mv^2};$$

ce qui donne, en intégrant,

$$-\sqrt{gm}.t = C + \text{arc.}\left(\text{tang.} = \sqrt{\frac{m}{g}}.v\right);$$

C étant la constante arbitraire. Soit, pour déterminer cette constante, a la vitesse de projection; en comptant le tems t à partir de l'origine du mouvement, on aura, à la fois, $t = 0$ et $v = a$, et par conséquent

$$0 = C + \text{arc.}\left(\text{tang.} = \sqrt{\frac{m}{g}}.a\right).$$

Eliminant C, il vient

$$\sqrt{gm}.t = \text{arc.}\left(\text{tang.} = \sqrt{\frac{m}{g}}.a\right) - \text{arc.}\left(\text{tang.} = \sqrt{\frac{m}{g}}.v\right).$$

En résolvant cette équation par rapport à v, on aura la vitesse du projectile à chaque instant.

Quant à l'espace parcouru, on a

$$de = vdt = \frac{-vdv}{g + mv^2};$$

en intégrant et en déterminant la constante arbitraire par la condition qu'on ait à la fois $e=0$ et $v=a$, on trouve

$$2me=\log.\left(\frac{g+ma^2}{g+mv^2}\right).$$

Comme on connaît à chaque instant la vitesse du mobile, au moyen de l'équation précédente, on aura aussi, au moyen de cette dernière équation, l'espace parcouru à un instant quelconque.

Ce qu'il importe le plus de connaître, c'est la plus grande hauteur à laquelle le corps s'élevera, en vertu de la vitesse de projection. Or, il s'élevera, jusqu'à ce que sa vitesse soit devenue nulle; on a donc $v=0$, quand le corps est parvenu à cette hauteur; si donc on la désigne par h, on aura

$$h=\frac{1}{2m}.\log.\left(1+\frac{m}{g}.a^2\right).$$

On voit que cette hauteur sera d'autant plus grande en général, que le coefficient m sera plus petit; d'où il suit, que toutes choses d'ailleurs égales, les corps les plus denses sont ceux qui s'élèvent à une plus grande hauteur; car nous avons dit plus haut que le coefficient m est en raison inverse de la densité du mobile.

211. Le problème que nous venons de résoudre, relativement à un corps pesant qui se meut dans un milieu résistant, comprend aussi le mouvement d'un corps pesant qui glisse le long d'un plan incliné, le frottement étant supposé proportionnel

au carré de la vitesse. Pour avoir la solution de celui-ci, il suffira de substituer dans les valeurs de e et de v, trouvées précédemment (n[os] 207 et 210), la pesanteur relative au plan incliné, à la place de la pesanteur absolue que nous avons représentée par g. Si le plan est horizontal, il faudra faire $g=0$ dans ces formules ; mais au lieu de chercher à déduire ce cas particulier du cas général, il vaut mieux le considérer directement. En effet, l'équation du mouvement se réduit alors à

$$\frac{dv}{dt}=-mv^2;$$

d'où l'on tire sans difficulté, en intégrant et en déterminant les constantes arbitraires,

$$v=\frac{a}{1+amt}, \quad me=\log.(1+amt);$$

a étant toujours la vitesse initiale.

On voit par cette valeur de v, que la vitesse du corps qui serait constante sans le frottement, diminue continuellement, et qu'après un certain tems, elle devient tout-à-fait insensible à cause du dénominateur $1+amt$ qui croît indéfiniment avec t. C'est ainsi que les frottemens et les résistances de tout genre que les corps éprouvent, anéantissent les mouvemens qui sont produits par des forces instantanées, et qui ne sont pas entretenus par des forces accélératrices, sans cesse agissant sur le mobile.

CHAPITRE II.

DU MOUVEMENT CURVILIGNE D'UN POINT MATÉRIEL LIBRE.

§. Ier *Théorie générale de ce mouvement.*

212. Le mouvement d'un point matériel qui ne se fait pas en ligne droite, est nécessairement dû à l'action de plusieurs forces agissant sur le mobile dans des directions différentes. La première question qui doit nous occuper, sera donc de déterminer la vitesse et la direction que prend un point libre, ou qui n'est retenu sur aucune ligne ou surface courbe donnée, pour obéir à l'action simultanée de ces forces.

Considérons d'abord un point m sollicité par deux forces, du genre de celles qui agissent instantanément sur le mobile, et qui l'abandonnent ensuite à lui-même (n° 183). Soient P et Q leurs intensités; prenons sur leurs directions mA et mB (fig. 52), des lignes ma et mb, qui représentent les vitesses que ces forces imprimeraient au mobile, si chacune d'elles agissait seule sur lui; de sorte que ma soit l'espace que le point m parcourrait pendant l'unité de tems, pour obéir à l'action de la seule force P, et mb l'espace qu'il parcourrait dans le même tems, en vertu

de la seule force Q. Je dis que si l'on construit un parallélogramme $macb$, sur ces deux lignes, le point m parcourra sa diagonale mc dans l'unité de tems, pour obéir à l'action simultanée des deux forces.

En effet, les forces étant proportionnelles aux vitesses qu'elles impriment à un même corps (n° 195), il s'ensuit que les intensités P et Q sont entre elles comme les lignes ma et mb; donc la résultante des forces P et Q est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur ces lignes (n° 16). Si donc on appelle R l'intensité de cette résultante, et x la vitesse qu'elle imprimera au mobile, on aura, en comparant la résultante R, à l'une des composantes, par exemple à la force P,

$$R : P :: mc : ma;$$

et comme les vitesses sont entre elles dans le rapport des forces qui les produisent, on aura aussi

$$x : ma :: R : P;$$

par conséquent

$$x : ma :: mc : ma;$$

d'où l'on conclut $x = mc$. Or, on peut remplacer l'action simultanée des deux forces P et Q, par celle de leur résultante R; le mobile prendra donc une vitesse égale à mc, et dirigée suivant cette diagonale.

Ainsi, tant qu'aucune nouvelle force n'agira sur le point m, il se mouvra uniformément sur la diagonale prolongée mC, et il décrira, dans chaque unité de tems, une portion de cette ligne, égale à mc. En chaque point de cette droite, le mobile sera dans

le même état que si la force R agissait actuellement sur lui, et lui imprimait la vîtesse mc.

213. Supposons qu'une nouvelle force S, du même genre que P et Q, et de direction quelconque, soit appliquée au mobile, quand il est parvenu en un point m' de la droite mC; soit $m'D$ la direction de cette force, et $m'd$ la vîtesse qu'elle lui imprimerait, s'il n'était pas déjà en mouvement : le mobile se trouve dans le même cas que si les deux forces R et S agissaient simultanément sur lui; on aura donc la vîtesse et la direction qu'il doit prendre, en portant à partir du point m', une ligne $m'c'$, égale à mc, sur la droite $m'C$, direction actuelle de son mouvement ou de la force R, et en achevant ensuite le parallélogramme $m'c'ed$, dont les deux droites $m'c'$ et $m'd$ sont les côtés adjacens : la diagonale $m'e$ sera, en grandeur et en direction, la vîtesse demandée.

Si l'on supposait encore qu'une nouvelle force fût appliquée au mobile, lorsqu'il sera parvenu au point m'' de sa nouvelle direction, l'action de cette force ferait changer la vîtese et la direction de son mouvement, et il est aisé de voir comment on déterminerait la vîtesse et la direction que le mobile prendrait. En général, on voit que si une suite de forces R, S, U, V, etc., agissent à des intervalles de tems déterminés, sur le point m, il décrira dans l'espace un polygone dont il sera facile de construire successivement tous les côtés. Chacun de ces côtés sera décrit d'un mouvement uniforme et avec une vîtesse constante pour un même côté, mais

variable d'un côté à l'autre : le premier côté sera décrit avec la vitesse due à la force R ; le second, avec la vitesse due à la résultante des forces R et S ; le troisième, avec la vitesse due à la résultante des forces R, S et U ; et ainsi de suite. On conçoit qu'à mesure que les intervalles de tems qui séparent les actions successives des forces R, S, U, etc., deviendront plus petits, le polygone décrit approchera de se confondre avec une courbe continue ; mais pour mieux connaître la nature de ce polygone et de la courbe qui en est la limite, et pour déterminer la loi du mouvement sur cette courbe, il est nécessaire de suivre une marche différente de celle que nous indiquons ici, dans l'intention seulement de marquer le passage du mouvement *rectiligne* au mouvement *curviligne*.

Dans le cas particulier où toutes les forces R, S, U, V, etc., agiront simultanément ou à intervalles quelconques, mais toutes dans la même direction, le polygone décrit par le mobile se réduira à une ligne droite, et la vitesse définitive sera égale à la somme des vitesses qui correspondent à ces forces ; et si une partie d'entre elles est dirigée en sens contraire des autres, cette vitesse sera égale à la somme des vitesses relatives aux forces qui agissent dans un même sens, moins la somme de celles qui correspondent aux autres forces.

214. Le moyen le plus simple de déterminer le mouvement d'un point matériel dans l'espace, est d'assigner à chaque instant la position de ses pro-

jections sur trois axes fixes. On peut se représenter ces projections, comme trois points mobiles qui suivent le point matériel pendant son mouvement : la question se réduit alors à chercher les lois de ces trois mouvemens rectilignes, et voici comment on parvient à la résoudre.

Soit O (fig. 53) le point de départ du mobile ; par ce point, menons trois axes fixes et rectangulaires, Ox, Oy, Oz ; supposons que des forces de grandeur et de direction quelconques, soient appliquées au mobile quand il est au point O, qu'elles agissent sur lui simultanément, et qu'elles l'abandonnent ensuite à lui-même. En quelque nombre que soient ces forces, on peut toujours les réduire à trois, dirigées suivant les trois axes; soient donc A, B, C, les intensités de ces forces; a la vitesse que la force A imprimerait au mobile dans la direction Ox, si elle existait seule; b la vitesse qui aurait lieu suivant Oy, en vertu de la force B; c la vitesse suivant Oz, qui serait due à la force C. Pour obéir à l'action simultanée de ces trois forces, le mobile se mouvra dans la direction de leur résultante, et avec la vitesse correspondante à l'intensité de cette force. Or, en appelant R cette résultante; α, β, γ, les angles que fait sa direction avec celles des composantes A, B, C, on aura (n° 20)

$$A=R.\cos.\alpha,\ B=R.\cos.\beta,\ C=R.\cos.\gamma,\ R^2=A^2+B^2+C^2;$$

de plus v désignant la vitesse due à la force R, de même que a, b, c désignent les vitesses dues aux forces A, B, C, on peut substituer dans ces équa-

tions, à la place de chaque force, la vîtesse correspondante, attendu que les rapports de ces vîtesses sont les mêmes que ceux des forces qui les produisent; on aura donc aussi

$$a = v.\cos.\alpha,\ b = v.\cos.6,\ c = v.\cos.\gamma,\ v^2 = a^2 + b^2 + c^2;$$

d'où l'on peut conclure que la vîtesse v, due à l'action simultanée des trois forces A, B, C, est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélépipède construit sur les trois vîtesses a, b, c, comme côtés adjacens.

Le mobile, en vertu de sa vîtesse v, décrira sur cette diagonale une droite égale à $v\theta$, dans un tems quelconque θ; les projections de cette droite sur les axes Ox, Oy, Oz, sont respectivement égales à $v\theta.\cos.\alpha$, $v\theta.\cos.6$, $v\theta.\cos.\gamma$, ou, ce qui est la même chose, à $a\theta$, $b\theta$, $c\theta$; il s'ensuit donc que les projections du mobile se meuvent uniformément sur ces axes, avec les vitesses a, b, c, tandis que ce point matériel se meut uniformément dans l'espace, avec la vîtesse v.

215. A la fin du tems θ, supposons que de nouvelles forces agissent sur le mobile, et soient $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$, leurs composantes parallèles aux axes Ox, Oy, Oz; soient aussi $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, les vîtesses que chacune de ces forces produirait dans sa direction, si elle agissait seule sur le mobile en repos : ce point matériel se trouve, à cet instant, dans le même état que s'il était en repos, et qu'il fût soumis à l'action simultanée des forces A, B, C, $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$, ou seulement des trois

forces $A+A_{,}$, $B+B_{,}$, $C+C_{,}$, parallèles aux droites Ox, Oy, Oz, et auxquelles correspondent les vitesses $a+a_{,}$, $b+b_{,}$, $c+c_{,}$, car à la somme des forces répond la somme des vitesses, d'après ce qu'on a vu dans le n° 215. En désignant donc par $v_{,}$, la vitesse que le mobile doit prendre, on aura

$$v_{,}^2=(a+a_{,})^2+(b+b_{,})^2+(c+c_{,})^2;$$

et si l'on voulait déterminer la nouvelle direction de son mouvement, on aurait

$$\frac{a+a_{,}}{v_{,}}, \quad \frac{b+b_{,}}{v_{,}}, \quad \frac{c+c_{,}}{v_{,}},$$

pour les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes Ox, Oy, Oz.

Pendant un tems quelconque $\theta_{,}$, qui succède au tems θ, les projections du mobile sur les axes, parcourront des espaces $(a+a_{,}).\theta_{,}$, $(b+b_{,}).\theta_{,}$, $(c+c_{,}).\theta_{,}$; donc à la fin du tems $\theta+\theta_{,}$, les distances de ces points au point O, seront

$$a\theta+(a+a_{,}).\theta_{,}, \quad b\theta+(b+b_{,}).\theta_{,}, \quad c\theta+(c+c_{,}).\theta_{,}.$$

Appliquons encore au mobile, à la fin du tems $\theta+\theta_{,}$, des forces dont les composantes parallèles aux axes, soient A_{2}, B_{2}, C_{2}, et auxquelles correspondent les vitesses a_{2}, b_{2}, c_{2}. On verra sans peine que les projections sur les axes décriront, pendant un troisième intervalle de temps θ_{2}, des espaces $(a+a_{,}+a_{2}).\theta_{2}$, $(b+b_{,}+b_{2}).\theta_{2}$, $(c+c_{,}+c_{2}).\theta_{2}$; de sorte qu'à la fin du tems $\theta+\theta_{,}+\theta_{2}$, ces projections se trouveront à des distances du point O, égales à

$$a\theta + (a + a_{,}).\theta_{,} + (a + a_{,} + a_{2}).\theta_{2},$$
$$b\theta + (b + b_{,}).\theta_{,} + (b + b_{,} + b_{2}).\theta_{2},$$
$$c\theta + (c + c_{,}).\theta_{,} + (c + c_{,} + c_{2}).\theta_{2}.$$

Continuons de même, et considérons successivement un nombre quelconque d'intervalles de tems, représentés par θ, $\theta_{,}$, $\theta_{2} \ldots \theta_{n}$; soient, en général, A_{n}, B_{n}, C_{n}, les composantes parallèles aux axes, des forces que l'on applique au mobile au commencement de l'intervalle quelconque θ_{n}; désignons par a_{n}, b_{n}, c_{n}, les vitesses correspondantes à ces forces; enfin soient x, y, z, les espaces parcourus par les projections de m sur les axes, depuis le commencement du tems θ jusqu'à la fin du tems θ_{n}; nous aurons, en généralisant ce qu'on vient de trouver,

$$x = a\theta + (a + a_{,}).\theta_{,} + (a + a_{,} + a_{2}).\theta_{2} \ldots + (a + a_{,} + a_{2} \ldots + a_{n}).\theta_{n},$$
$$y = b\theta + (b + b_{,}).\theta_{,} + (b + b_{,} + b_{2}).\theta_{2} \ldots + (b + b_{,} + b_{2} \ldots + b_{n}).\theta_{n},$$
$$z = c\theta + (c + b_{,}).\theta_{,} + (c + c_{,} + c_{2}).\theta_{2} \ldots + (c + c_{,} + c_{2} \ldots + c_{n}).\theta_{n}.$$

Au moyen de ces valeurs de x, y, z, qui sont les trois coordonnées du mobile, rapportées aux axes Ox, Oy, Oz, on déterminera immédiatement sa position dans l'espace, sans être obligé de construire le polygone qu'il décrit. Chacune de ces valeurs, prise isolément, renferme la loi du mouvement de la projection de ce point matériel sur l'axe correspondant.

216. Il se présente ici une observation importante à faire, relativement à la composition des valeurs de x, y, z. Elle nous montre clairement que l'espace parcouru par la projection du mobile m, sur l'un des trois axes, ne dépend que des vitesses qui

seraient produites par les forces parallèles à cet axe, si ces composantes agissaient seules sur le mobile; de manière que cet espace n'est aucunement modifié par l'action des forces parallèles aux deux autres axes. Ainsi la valeur de x ne renferme que les vîtesses a, $a_{,}$, $a_{,,}$, ... a_{n}, qui seraient imprimées au mobile par les forces A, $A_{,}$, $A_{,,}$, ... A_{n}, parallèles à l'axe Ox, si toutes les autres étaient nulles; de même l'action des forces parallèles aux axes Ox, Oz, ne contribue ni à augmenter ni à diminuer la valeur de y; et celle de z est la même que si les forces parallèles à l'axe Oz, avaient agi seules sur le mobile.

Comme ce résultat est indépendant de la grandeur des intervalles de tems θ, $\theta_{,}$, $\theta_{,,}$, ... θ_{n}, qui séparent les actions des forces appliquées successivement au mobile, ainsi que de la grandeur des vîtesses dues à ces forces, il s'ensuit qu'on peut l'étendre au cas où ces intervalles et ces vîtesses deviennent, en tout ou en partie, infiniment petits, c'est-à-dire, au cas où le mobile est soumis à l'action d'une ou plusieurs forcesaccélératrices, combinées avec d'autres forces dont l'action est instantanée.

Concluons donc que *si l'on décompose en trois forces parallèles à trois axes fixes, les forces quelconques qui produisent le mouvement curviligne d'un point matériel, et si l'on considère comme des points mobiles les projections du point matériel sur ces axes, le mouvement sur chaque axe sera dû aux forces parallèles à cette ligne, et le même que si les autres forces étaient nulles.*

Dans chaque cas particulier, on déterminera les

mouvemens sur les axes, d'après les équations du mouvement rectiligne données dans le chapitre précédent; la solution d'un problème quelconque, relatif au mouvement curviligne, sera donc réduite à considérer trois mouvemens rectilignes, ou seulement deux, quand on sera certain, par la nature de la question, que le mobile doit toujours rester dans un même plan; car alors on pourra prendre, dans ce plan, deux des trois axes coordonnés.

217. Pour éclaircir ceci par un exemple fort simple, considérons le mouvement d'un point matériel pesant, auquel on imprime une vitesse dirigée suivant une droite horizontale.

Il est d'abord évident que le mobile ne saurait sortir du plan vertical mené par cette droite, puisque tout est semblable de part et d'autre de ce plan; de plus, si l'on fait abstraction de la pesanteur, afin de déterminer le mouvement de la projection sur cette même droite, on voit qu'il sera uniforme et dû à la vitesse donnée; de même, en supposant cette vitesse nulle, on voit que le mouvement de la projection sur la verticale menée par le point de départ, sera uniformément accéléré; or, en vertu du théorème précédent, ces deux mouvemens doivent avoir lieu ensemble, sans s'altérer en aucune manière; il s'ensuit donc que la courbe décrite par le mobile sera telle, que les abcisses horizontales, comptées du point de départ, croîtront proportionnellement au tems, tandis que les ordonnées verticales, comptées du même point, croîtront proportionnellement au carré

du tems : les abcisses seront donc proportionnelles aux carrés des ordonnées ; et par conséquent la courbe décrite sera une parabole, qui aura son grand axe vertical, et son sommet au point de départ. Quant au paramètre, il dépendra du rapport de la vitesse donnée à la pesanteur. Nous reprendrons bientôt, plus en détail, la solution de ce problème.

218. Le théorème précédent est essentiellement fondé sur la loi des vitesses proportionnelles aux forces qui les produisent, sans laquelle il n'aurait pas lieu. Voici un corollaire général qui s'en déduit immédiatement et qui va nous fournir, par son accord avec l'expérience, une confirmation frappante de cette loi que nous avons admise comme étant celle de la nature (n° 193).

Considérons un plan indéfini, sur lequel se meuvent un nombre quelconque de points matériels soumis à des forces dirigées dans ce plan ; supposons que l'on applique à tous les points de ce plan des forces égales entre elles, et qui lui soient perpendiculaires ; de sorte que ce plan soit mis en mouvement dans l'espace, en restant toujours parallèle à lui-même. Il est évident que chacun des points mobiles sur le plan, se trouvera soumis à l'action simultanée des forces particulières qui agissaient d'abord sur lui, et de la force appliquée à tous les points du plan ; le mouvement de chaque point matériel dans l'espace sera donc produit par la résultante de ces différentes forces ; or, d'après le théorème du n° 216, si l'on rapporte le mouvement à trois axes fixes, dont un

soit perpendiculaire et les deux autres parallèles à ce plan mobile, les mouvemens des projections des mobiles sur ces deux derniers axes, ne seront point altérés par la force parallèle au premier, ou autrement dit, le mouvement de chaque point matériel sur le plan devenu mobile, demeurera le même que si ce plan fût resté en repos.

Ce résultat est conforme à une expérience que nous avons souvent l'occasion de répéter, et qui nous prouve qu'un mouvement commun à tous les corps d'un système, n'altère pas les mouvemens particuliers de ces corps, c'est-à-dire, que ces corps conservent entre eux les mêmes distances et les mêmes vitesses relatives, que si le mouvement commun n'existait pas.

219. Cherchons maintenant les équations différentielles du mouvement curviligne d'un point matériel, soumis à l'action d'une ou plusieurs forces accélératrices, et à celle d'une autre force qui lui a imprimé instantanément une vitesse finie à l'origine de son mouvement.

Après un temps quelconque t, soient x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires du mobile, rapportées aux trois axes fixes Ox, Oy, Oz; ces coordonnées seront des fonctions de t, et le mouvement sera entièrement déterminé quand ces fonctions seront connues, puisqu'alors on aura, à chaque instant, la position du mobile dans l'espace. Décomposons chacune des forces accélératrices données, en trois autres, parallèles aux axes des coordonnées, et

soient X, Y, Z, les sommes des composantes respectivement parallèles aux axes des x, des y et des z. Les quantités X, Y, Z seront données dans chaque cas particulier, en fonction de x, y, z; et je les supposerai positives ou négatives, selon que les forces qu'elles représentent tendront à augmenter ou à diminuer les coordonnées du mobile.

D'après ce qu'on vient de démontrer, le mouvement de la projection du mobile sur chaque axe, est dû aux forces parallèles à cet axe. En appliquant donc à chacun de ces trois mouvemens rectilignes, l'équation générale $\frac{d^2e}{dt^2}=\varphi$ du n° 198, on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2}=Z. \qquad (m)$$

Telles sont les équations générales du mouvement d'un point matériel dans l'espace. On voit que la vitesse initiale du mobile n'y entre pas; mais cette vitesse et sa direction serviront, avec la position du mobile à l'origine du mouvement, à déterminer les constantes arbitraires qui doivent completter les intégrales de ces équations; lesquelles constantes seront au nombre de six, puisqu'il s'agit de trois équations différentielles du second ordre. La solution complette de chaque problème particulier exigera donc que l'on intègre le système de ces trois équations, et que l'on détermine ensuite les constantes arbitraires de leurs intégrales, d'après les conditions initiales du mouvement. Mais, si l'on sait d'avance que le mobile doit se mouvoir dans un plan donné,

on

on simplifiera la question en le prenant pour l'un des trois plans des coordonnées, par exemple, pour celui des x, y; il faudra, pour cela, que la force Z n'existe pas, et l'on aura aussi $z=0$: le problème alors ne dépendra plus que de deux équations différentielles secondes, savoir, des deux premières équations (m).

Lorsqu'on sera parvenu à intégrer les équations (m), on aura, dans le cas général, trois équations entre x, y, z et t; si l'on élimine le tems t, entre elles, il en restera deux, entre les coordonnées x, y, z, qui seront les équations de la courbe décrite par le mobile dans l'espace : on appelle cette courbe, qui sera généralement à double courbure, la *trajectoire* du mobile.

220. Le cas particulier le plus simple que l'on puisse considérer, est celui dans lequel les trois forces X, Y, Z sont nulles. Les équations (m) se réduisent alors à

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2z}{dt^2}=0;$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$x=at+a', \quad y=bt+b', \quad z=ct+c';$$

a, b, c, a', b', c', étant les six constantes arbitraires. Si l'on place l'origine des coordonnées au point de départ du mobile, et que l'on compte le tems t, de l'instant de ce départ, on aura, à la fois, $x=0, y=0$, $z=0, t=0$; d'où il suit $a'=0$, $b'=0$, $c'=0$; et par conséquent

$$x=at, \quad y=bt, \quad z=ct.$$

En éliminant t, on a

$$x = \frac{a}{c}.z, \quad y = \frac{b}{c}.z;$$

ce qui nous apprend que la trajectoire est une ligne droite.

Soit u la partie de cette ligne, comprise entre l'origine et le point qui répond aux coordonnées x, y, z; nous aurons

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = t.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2};$$

u étant proportionnelle au tems, il s'ensuit que le mouvement du point matériel dans l'espace, est uniforme, comme celui de chacune de ses projections sur les axes. La vitesse du mobile est $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; celles des projections sont a, b, c; or, en général, la vitesse de la projection d'un point matériel sur une droite, est ce qu'on appelle la vitesse de ce point *décomposée* suivant cette droite : a, b, c s'appelleront donc les *composantes* de la vitesse $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ suivant les trois axes; et réciproquement $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ sera la *résultante* des vitesses a, b, c.

Si l'on désigne par α, $\mathcal{C}$, γ, les angles que fait la direction de cette résultante avec les axes des x, des y et des z, et si l'on observe que x, y, z sont les projections de u, sur ces axes, on aura

$$x = u.\cos.\alpha, \quad y = u.\cos.\mathcal{C}, \quad z = u.\cos.\gamma;$$

mettant pour x, y, z et u leurs valeurs, divisant par t,

et faisant pour abréger,

$$v^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

il vient

$$a = v.\cos.\alpha, \quad b = v.\cos.\beta, \quad c = v.\cos.\gamma.$$

Ces quatre dernières équations renferment toute la théorie de la composition et de la décomposition des vîtesses, ou des mouvemens uniformes; et l'on voit que ces deux opérations, inverses l'une de l'autre, se feront d'après les mêmes règles que la composition et la décomposition des forces (n° 20); ce qui vient de ce que les vîtesses sont entre elles, dans le même rapport que les forces qui les produisent.

221. Reprenons le cas général où X, Y, Z sont des forces accélératrices données.

Si, à une époque quelconque du mouvement, on suppose que ces forces viennent à cesser subitement leur action sur le mobile, le mouvement sur chaque axe des coordonnées deviendra uniforme : la vîtesse sera $\frac{dx}{dt}$ sur l'axe des x, $\frac{dy}{dt}$ sur l'axe des y, $\frac{dz}{dt}$ sur l'axe des z (n° 197); par conséquent le mouvement du corps dans l'espace, se changera en un mouvement rectiligne et uniforme; et si nous désignons par v la vîtesse de ce mouvement, par ds l'élément de la trajectoire, ou $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, nous aurons, d'après le n° précédent,

$$v = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}} = \frac{ds}{dt}.$$

Nous aurons aussi, en appelant α, β, γ, les angles que fait la direction de cette vitesse avec les axes des x, y, z,

$$v.\cos.\alpha = \frac{dx}{dt}, \quad v.\cos.\beta = \frac{dy}{dt}, \quad v.\cos.\gamma = \frac{dz}{dt};$$

ou bien, en mettant pour v sa valeur $\frac{ds}{dt}$, et divisant par cette valeur,

$$\cos.\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos.\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos.\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Or, on sait que les cosinus des angles que fait la tangente à la trajectoire, avec les axes des coordonnées, sont aussi égaux aux rapports $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$; il en faut donc conclure que la direction de la vitesse v coïncide avec cette tangente.

Nous voyons par là que si l'on supprimait tout-à-coup les forces qui infléchissent et qui font varier le mouvement d'un point matériel dans l'espace, le mobile s'échapperait par la tangente à la trajectoire, avec une vitesse égale à l'élément de cette courbe, divisé par l'élément du tems.

222. On parvient encore à cette conclusion, d'une autre manière qu'il ne sera pas inutile d'indiquer. Quel que soit le mouvement d'un point matériel, on peut partager la ligne qu'il décrit en une infinité d'élémens infiniment petits, que l'on regardera comme des lignes droites décrites d'un mouvement uniforme. La vitesse du mobile, tant qu'il restera sur

un même élément, sera donc égale à la longueur de cet élément, divisée par le tems infiniment petit, employé à parcourir cette longueur. Or, si l'on supprime à un instant quelconque, les forces accélératrices, le mobile, en vertu de l'inertie de la matière, doit continuer à se mouvoir avec la même vîtesse sur le prolongement de l'élément qu'il décrit à cet instant, lequel prolongement n'est autre chose que la tangente à la trajectoire; il s'échappera donc par cette tangente, avec une vîtesse égale au rapport de l'élément de la courbe à celui du tems.

223. Dans le mouvement curviligne, on entend par la vîtesse du mobile à un instant quelconque, celle du mouvement rectiligne et uniforme, qui aurait lieu si, à cet instant, les causes qui infléchissent et font varier le mouvement, venaient à cesser leur action : cette vîtesse est donc égale à $\frac{ds}{dt}$, et dirigée suivant la tangente à la trajectoire.

La variable s est une fonction du tems qui exprime la longueur de la ligne courbe, parcourue par le mobile; ainsi, l'on peut dire qu'ici, comme dans le mouvement rectiligne, la vîtesse est égale au premier coefficient différentiel de l'espace parcouru, considéré comme une fonction du tems.

On peut aussi remarquer que le second coefficient différentiel de cette fonction exprime la force accélératrice, décomposée suivant la tangente à la trajectoire. En effet, pour avoir cette force, il faut décomposer, suivant sa direction, toutes les forces

qui agissent sur le mobile; or, ces forces sont X, Y, Z, dont les composantes suivant la tangente à la trajectoire, sont $X.\frac{dx}{ds}$, $Y.\frac{dy}{ds}$, $Z.\frac{dz}{ds}$, puisque $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sont les cosinus des angles compris entre cette droite et les axes des x, y, z; leur somme, en ayant égard aux équations (m), sera donc

$$\frac{dx.d^2x + dy.d^2y + dz.d^2z}{ds.dt^2};$$

mais en différentiant l'équation identique,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

il vient

$$dx.d^2x + dy.d^2y + dz.d^2z = ds.d^2s;$$

ce qui réduit la quantité précédente à $\frac{d^2s}{dt^2}$, qui est, comme nous l'avons avancé, la force accélératrice du mobile décomposée suivant la tangente à la trajectoire.

224. Si l'on ajoute les équations (m), après avoir multiplié la première par $2dx$, la deuxième par $2dy$, la dernière par $2dz$, on trouve

$$\frac{2dx.d^2x+2dy.d^2y+2dz.d^2z}{dt^2} = d.\frac{ds^2}{dt^2} = 2(Xdx+Ydy+Zdz);$$

et en intégrant

$$\frac{ds^2}{dt^2} = C + 2\int(Xdx + Ydy + Zdz);$$

C étant une constante arbitraire.

Lorsque la formule $Xdx + Ydy + Zdz$, qui se trouve sous le signe $\int$, sera une différentielle exacte à trois variables x, y, z, cette dernière équation donnera la vitesse du mobile en un point quelconque de la trajectoire, pourvu que l'on connaisse cette vitesse en un point déterminé. En effet, en intégrant cette formule, on aura une certaine fonction de x, y, z, que je désignerai par $f(x, y, z)$, et l'équation précédente deviendra

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = C + 2f(x, y, z).$$

Or, si l'on représente par A, la vitesse au point de la trajectoire dont les coordonnées sont a, b, c, on aura, pour déterminer C,

$$A^2 = C + 2f(a, b, c);$$

d'où l'on conclut

$$v^2 - A^2 = 2f(x, y, z) - 2f(a, b, c);$$

équation qui fera connaître la valeur de v, quand celle de A sera donnée, et que les coordonnées x, y, z, a, b, c, correspondantes à ces deux vitesses, seront aussi connues.

225. Il est remarquable que l'on puisse déterminer la différence des carrés des vitesses, en deux points de la trajectoire, au moyen seulement des coordonnées de ces points, et sans connaître la courbe que le mobile suit en passant d'un point à l'autre. Mais on ne doit point oublier que ce résultat

suppose que $Xdx + Ydy + Zdz$ est une différentielle exacte à trois variables ; ce qui n'a pas toujours lieu dans la nature. Si, par exemple, les forces X, Y, Z, proviennent d'un frottement ou de la résistance d'un fluide, elles renfermeront dans leurs valeurs les vitesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, ainsi qu'on le verra bientôt; par conséquent la formule $Xdx + Ydy + Zdz$ ne saurait être alors la différentielle exacte d'une fonction de x, y, z, regardées comme des variables indépendantes : pour l'intégrer dans ce cas, il faudra y substituer les valeurs de ces variables et de leurs différentielles en fonction du tems, ce qui suppose déjà le problème résolu.

Il existe un cas particulier, fort étendu, dans lequel cette formule est une différentielle exacte ; c'est celui où toutes les forces accélératrices qui agissent sur le mobile sont dirigées vers des centres fixes, et où l'intensité de chacune d'elles est une fonction de la distance du mobile à son centre d'action.

Soit, pour le prouver, F l'intensité d'une pareille force, dirigée vers un point fixe; l, m, n les coordonnées de ce point ; f sa distance au mobile dont les coordonnées sont les variables x, y, z : F sera une fonction de f, et l'on aura

$$f^2 = (x - l)^2 + (y - m)^2 + (z - n)^2.$$

Les cosinus des angles que fait la ligne f, avec les axes des x, des y et des z, seront, comme il est

aisé de le voir,

$$\frac{x-l}{f}, \quad \frac{y-m}{f}, \quad \frac{z-n}{f};$$

les composantes de F, parallèles à ces axes, seront donc

$$\frac{x-l}{f}.F, \quad \frac{y-m}{f}.F, \quad \frac{z-n}{f}.F;$$

par conséquent, la partie de la valeur de $Xdx+Ydy+Zdz$, qui provient de la force F, sera Fdf, en observant que

$$df=\frac{x-l}{f}.dx+\frac{y-m}{f}.dy+\frac{z-n}{f}.dz.$$

Donc, si l'on a un nombre quelconque de forces semblables à F, représentées par F', F'', etc., et dirigées vers des points fixes dont les distances mobiles soient f', f'', etc., on aura, en ayant égard à toutes ces forces,

$$Xdx+Ydy+Zdz=Fdf+F'df'+F''df''+\text{etc.}:$$

or, tous les termes de cette valeur, et par conséquent la valeur entière, sont des différentielles exactes, puisque F est une fonction de f, F' de f', F'' de f'', etc.

Si une ou plusieurs de ces forces étaient dirigées vers des centres mobiles; si, par exemple, les coordonnées l, m, n, n'étaient pas constantes, la valeur précédente de df ne serait plus complète, et la formule $Xdx+Ydy+Zdz$ ne serait plus une différentielle exacte.

226. Lorsque le mobile est sollicité par une seule force, dirigée vers un point fixe, on obtient immédiatement trois intégrales premières des équations (m), qu'il est important de connaître.

Plaçons l'origine O des coordonnées à ce point fixe; soit m une position quelconque du mobile; prenons la droite Om, pour représenter l'intensité de la force qui lui est appliquée, et qui agit suivant cette droite. Si l'on construit le parallélépipède dont Om est la diagonale, et qui a ses trois côtés sur les axes Ox, Oy, Oz, il est évident que ces côtés seront les coordonnées x, y, z du point m; les forces X, Y, Z, qui sont les composantes de la force Om, suivant ces axes, seront donc représentées par les coordonnées; par conséquent, on aura

$$X : Y : Z :: x : y : z;$$

d'où l'on tire

$$xY = yX, \quad zX = xZ, \quad yZ = zY.$$

Or, les équations (m) donnent, par une combinaison fort simple,

$$\left.\begin{aligned} xd^2y - yd^2x &= (xY - yX).dt^2, \\ zd^2x - xd^2z &= (zX - xZ).dt^2, \\ yd^2z - zd^2y &= (yZ - zY).dt^2. \end{aligned}\right\} \qquad (m')$$

En vertu des équations précédentes, les seconds membres de celles-ci sont nuls; d'ailleurs leurs premiers membres sont les différentielles de $xdy - ydx$,

$zdx - xdz$, $ydz - zdy$; on aura donc, en intégrant,

$$xdy - ydx = cdt,\quad zdx - xdz = c'dt,\quad ydz - zdy = c''dt; \quad (m'')$$

c, c', c'', étant des constantes arbitraires.

Si l'on ajoute ces intégrales, après avoir multiplié la première par z, la deuxième par y, la troisième par x, on trouve :

$$cz + c'y + c''x = 0.$$

Cette équation appartenant à un plan, il en faut conclure que dans le cas que nous considérons, la trajectoire est une courbe plane; et en effet, tout est semblable de part et d'autre du plan mené par la direction de la vitesse initiale du mobile, et par le point fixe vers lequel la force qui le sollicite est constamment dirigée ; il n'y a donc pas de raison pour que le mobile sorte de ce plan, qui sera celui de sa trajectoire.

227. Pour énoncer un théorème remarquable que les équations (m'') renferment, considérons la projection du mobile sur le plan des x, y. Soit p cette projection, r son rayon vecteur Op, et v l'angle xOp compris entre ce rayon et l'axe des x; on aura $x = r.\cos.v$, $y = r.\sin.v$; d'où l'on tire

$$xdy - ydx = r^2dv.$$

Prenons l'angle infiniment petit $p'Op$ pour représenter l'angle dv, de manière que Op et Op' soient deux rayons vecteurs consécutifs de la projection du

mobile, et pp' l'arc décrit par cette projection pendant l'instant dt : le secteur pOp' sera l'aire décrite par son rayon vecteur pendant cet instant ; or, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre, ce secteur pOp' peut-être regardé comme un secteur circulaire, et son aire est égale à $\frac{1}{2}.r^2dv$, ou à la moitié de $xdy - ydx$; donc, en vertu de la première des équations (m'') cette aire sera une quantité constante et égale à $\frac{1}{2}.cdt$; par conséquent l'aire décrite par le même rayon, pendant un tems t quelconque, est proportionnelle à ce tems, et égale à $\frac{1}{2}.ct$. Les deux autres équations (m'') signifient de même que les aires décrites par les rayons vecteurs des projections du mobile sur les plans des x, z, et des y, z, sont proportionnelles au tems employé à les décrire.

Ainsi, *toutes les fois que la force accélératrice qui agit sur un mobile est constamment dirigée vers un point fixe, les aires décrites autour de ce point, par le rayon vecteur du mobile, projeté sur un plan mené par ce même point, sont proportionnelles au tems employé à les décrire.* Rien n'empêche en effet de prendre ce plan quelconque, pour l'un des trois plans des coordonnées x, y, z.

Réciproquement, quand cette propriété a lieu relativement à trois plans rectangulaires, on en peut conclure que la résultante des forces qui agissent sur le mobile est constamment dirigée suivant la droite qui joint le point d'intersection de ces trois plans et le mobile.

En effet, en plaçant l'origine des coordonnées x, y, z, en ce point, et prenant les trois plans don-

nés pour ceux de ces coordonnées, les trois aires $xdy-ydx$, $zdx-xdz$, $ydz-zdy$, seront constantes d'après l'hypothèse; leurs différentielles xd^2y-yd^2x, zd^2x-xd^2z, yd^2z-zd^2y, seront donc nulles; et l'on aura, en vertu des équations (m'),

$$yX=xY,\quad zX=xZ,\quad yZ=zY.$$

Or il s'ensuit que les composantes X, Y, Z, sont entre elles comme les coordonnées x, y, z; par conséquent leur résultante est dirigée suivant la droite qui joint le mobile et l'origine de ces coordonnées, puisque cette ligne est la diagonale du parallélépipède dont x, y, z sont les trois côtés.

228. Puisque la trajectoire d'un mobile sollicité par une force dirigée vers un centre fixe, est une courbe plane, et que dans l'énoncé du théorème précédent, la direction du plan de projection est arbitraire, il en résulte que ce théorème a également lieu, par rapport aux aires décrites par le rayon vecteur du mobile, dans le plan même de la trajectoire. Cette proposition se démontre directement, de la manière suivante.

A la courbe décrite par le mobile, substituons un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits; soient $m_{,}m$ et mm' (fig. 54), deux côtés consécutifs de ce polygone, décrits dans des intervalles de tems infiniment petits, que nous supposerons égaux; soit aussi C, le centre d'action de la force qui agit sur le mobile : pendant qu'il décrit les côtés $m_{,}m$ et mm',

son rayon vecteur décrira les aires $m_{\prime}Cm$ et mCm' : or, je dis que ces aires sont égales entre elles.

En effet, quand le mobile est parvenu au point m, si la force accélératrice n'agissait pas sur lui, sa vitesse ne serait changée, ni en grandeur, ni en direction; il continuerait donc à se mouvoir sur le côté $m_{\prime}m$ prolongé, et il parcourrait, dans le second instant qu'on suppose égal au premier, une droite mn, égale au côté $m_{\prime}m$. Mais, au point m, la force dirigée vers le point C, agit sur le mobile; la vitesse qu'elle lui imprime, suivant la direction mC, lui ferait parcourir, s'il était en repos, un certain espace mg, dans le second instant : le mobile, parvenu au point m, est donc animé de deux vitesses qui lui feraient parcourir les droites mn et mg, dans le même intervalle de tems, si elles avaient lieu séparément ; par conséquent le côté mm' qu'il parcourra dans le second instant, sera la diagonale du parallélogramme $mgm'n$, construit sur ces deux droites mg et mn (n° 212). Le triangle mCm' sera donc égal au triangle mCn, puisqu'ils ont même base mC, et leurs sommets m' et n, sur une parallèle à cette base; d'ailleurs les triangles $m_{\prime}Cm$ et mCn sont aussi égaux, à cause qu'ils ont un sommet commun C, et leurs bases $m_{\prime}m$ et mn, égales et situées sur une même droite; donc les triangles $m_{\prime}Cm$ et mCm', égaux à un même triangle mCn, sont aussi égaux entre eux.

Si les aires dans deux instans consécutifs et égaux, sont égales, il s'ensuit que les aires décrites dans deux intervalles de tems égaux, sont aussi égales, car on peut partager ces deux intervalles, dans le

même nombre d'instans égaux; par conséquent aussi, les aires décrites dans des tems quelconques, seront entre elles comme ces tems.

Donc les aires décrites autour d'un point fixe, par le rayon vecteur d'un point matériel, sont proportionnelles au tems employé à les décrire, toutes les fois que la force qui agit sur le mobile, est constamment dirigée vers ce point fixe.

Réciproquement, si l'on sait, par l'expérience, ou tout autrement, que les aires sont proportionnelles au tems, on en pourra conclure que la force qui sollicite le mobile, est dirigée vers l'origine des aires dans tous les instans du mouvement. Car dans cette hypothèse, les aires m_iCm et mCm', décrites dans deux instans égaux et consécutifs, seront égales; mais en conservant la construction précédente, on a $m_iCm = mCn$; les deux triangles mCn et mCm' devront donc être égaux; et comme ils ont même base mC, il faudra que la droite nm', qui joint leurs sommets, soit parallèle à cette base; or, d'après la composition des mouvemens (n°213), cette droite est toujours parallèle à la direction de la force qui agit au point m, et qui empêche le mobile de suivre la direction mn; donc la direction de cette force coïncide avec la ligne mC, ou avec son prolongement mh. La figure suppose que cette force inconnue tend à rapprocher le mobile du point C, auquel cas la trajectoire est concave vers ce point; il est aisé de voir qu'elle serait, au contraire, convexe vers le même point, si la force agissait dans le sens mh.

§. II. *Mouvement des Projectiles dans le vide et dans un milieu résistant.*

229. Nous allons maintenant appliquer cette théorie générale du mouvement curviligne, à un corps pesant, projeté avec une vitesse quelconque, soit dans le vide, soit dans un milieu résistant, et nous commencerons d'abord par le premier cas.

Il est évident que la courbe que décrira le projectile sera entièrement comprise dans le plan vertical mené par la direction de la vitesse de projection; prenons donc ce plan pour celui des x, y; l'axe Ox horizontal, l'axe Oy vertical, et les y positives au-dessus de l'axe horizontal. Il nous suffira des deux premières équations (m) du n° 219; de plus, la force accélératrice X sera nulle, et la force Y sera égale à $-g$, g étant la pesanteur que nous regarderons comme une force constante. Ces équations deviendront donc

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g;$$

d'où l'on tire en intégrant

$$x=bt+b', \quad y=-\frac{gt^2}{2}+ct+c';$$

c, c', b, b', étant les constantes arbitraires.

Pour les déterminer, plaçons l'origine des coordonnées x, y, au point de départ du projectile, et

et comptons le tems t, de l'instant de ce départ; nous aurons, à cet instant, $t=0$, $x=0$, $y=0$; donc $b'=0$, $c'=0$. Désignons par a la vitesse de projection; pour fixer les idées, supposons que le corps a été lancé dans l'angle des x et des y positives; soit OA (fig. 55) sa direction initiale, et α l'angle AOx, que cette direction fait avec l'axe des x: $100^{\circ}-\alpha$ sera l'angle de cette même direction avec l'axe des y, et l'on aura $a.\cos.\alpha$, $a.\sin.\alpha$ pour les vitesses horizontale et verticale du mobile, à l'origine du mouvement. Or, à un instant quelconque, ces vitesses sont exprimées par $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$; on a, en différentiant les valeurs de x et y,

$$\frac{dx}{dt}=b, \quad \frac{dy}{dt}=-gt+c;$$

faisant donc $t=0$, on aura

$$b=a.\cos.\alpha \quad \text{et} \quad c=a.\sin.\alpha.$$

Les constantes arbitraires étant ainsi déterminées, les valeurs de x et y deviennent

$$x=a.\cos.\alpha.t, \quad y=-\frac{gt^2}{2}+a.\sin.\alpha.t.$$

Eliminant t entre ces équations, on trouvera, pour celle de la trajectoire,

$$y=\text{tang}.\alpha.x-\frac{g}{2a^2.\cos^2.\alpha}.x^2;$$

ce qui nous fait voir que cette courbe est une parabole dont le grand axe est vertical. Au sommet,

que je suppose être le point C, la tangente est horizontale, et l'on a $\frac{dy}{dx}=0$; d'où l'on conclut, pour les coordonnées OD et CD, de ce point,

$$x=OD=\frac{a^2.\cos.\alpha.\sin.\alpha}{g}, \quad y=CD=\frac{a^2.\sin^2.\alpha}{2g}.$$

Quant à la vitesse en un point quelconque de la trajectoire, on aura

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}=v^2=a^2-2gy;$$

v étant cette vitesse.

230. L'ordonnée CD du sommet de la parabole exprime la plus grande hauteur à laquelle le mobile s'élève sur cette courbe; c'est ce qu'on appelle la *hauteur du jet*. Après avoir atteint le sommet, le mobile redescend, et comme la branche descendante de sa trajectoire est semblable à sa branche ascendante, il revient couper l'axe des x, en un point dont l'abscisse OB est double de celle qui répond au sommet. On appelle cet abscisse l'*amplitude du jet*, et en observant que $2.\cos.\alpha.\sin.\alpha=\sin.2\alpha$, on a

$$OB=\frac{a^2.\sin.2\alpha}{g};$$

où l'on voit que pour une force de projection donnée, l'amplitude est la plus grande, quand le projectile est lancé sous un angle de 50°, c'est-à-dire, quand on a $\alpha=50°$. On obtiendrait aussi cette valeur de OB, en faisant $y=0$ dans l'équation de la trajectoire.

La vitesse a étant toujours donnée, si l'on demande quel doit être l'angle α, pour que le projectile atteigne un point donné, dont les coordonnées sont $x=\beta$, $y=\gamma$, on mettra ces valeurs dans l'équation de la trajectoire, et l'on aura, pour déterminer α,

$$\gamma = \text{tang.}\,\alpha.\beta - \frac{g}{2a^2.\cos^2.\alpha}.\beta^2.$$

Pour simplifier cette équation, soit h la hauteur due à la vitesse a, de manière qu'on ait $a^2 = 2gh$ (n° 189); soit aussi tang. $\alpha = z$, et par conséquent $\frac{1}{\cos^2.\alpha} = 1 + z^2$; notre équation deviendra

$$4h\gamma + \beta^2 - 4h\beta.z + \beta^2.z^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - 4h\gamma - \beta^2}}{\beta}.$$

On peut donc, en général, atteindre le but donné en tirant sous deux directions différentes, puisque nous trouvons deux valeurs de tang.α; mais si l'on a $4h\gamma + \beta^2 > 4h^2$, ces deux valeurs sont imaginaires, et le problème est impossible.

231. Rien ne serait donc plus simple que la théorie des projectiles, si l'on pouvait faire abstraction de la résistance que l'air oppose à leur mouvement; mais cette résistance est trop grande pour qu'il soit permis de la négliger, et nous allons maintenant y avoir égard.

La résistance d'un milieu quelconque est une force dirigée suivant la tangente à la trajectoire, toujours en sens contraire du mouvement du mobile; une telle force n'empêchera pas la trajectoire d'un corps pesant d'être une courbe plane, comprise dans le plan vertical qui contient la direction de la vitesse initiale; nous prendrons donc les axes des x et des y comme précédemment; de plus, nous désignerons par s l'arc Om (fig. 56) de la trajectoire, compris entre l'origine des coordonnées, ou le point de départ du projectile, et le point m qui répond aux coordonnées x et y : les rapports $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ seront les cosinus des angles que la droite mT, tangente au point m, à la trajectoire, fait avec les axes des x et des y; en désignant donc par R, la résistance du milieu, et observant que cette force agit suivant le prolongement mT' de la droite mT, nous aurons $-R.\frac{dx}{ds}$ et $-R.\frac{dy}{ds}$, pour ses composantes horizontale et verticale; et il est aisé de voir que soit dans la branche ascendante de la trajectoire, soit dans la branche descendante, ces valeurs sont positives ou négatives, selon que la force R tend à augmenter ou à diminuer les x et les y; en ayant donc égard en outre à la pesanteur, que je désignerai par g, les deux équations du mouvement seront (n° 219)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R.\frac{dx}{ds}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - R.\frac{dy}{ds}.$$

232. Ces équations conviennent également à tous

les points du projectile, pourvu que tous ces points aient le même mouvement dans l'espace, de manière qu'ils décrivent des courbes parallèles, et qu'à chaque instant, leurs vitesses soient toutes égales, parallèles et dirigées dans un même sens. Dans cette hypothèse, on peut considérer le mouvement d'un projectile qui n'est pas un point matériel isolé, mais bien un corps de dimension finie. La résistance R dépend alors de la forme, des dimensions, de la densité et de la vitesse du corps; elle dépend aussi de la densité de l'air, dans lequel il se meut; mais on peut, sans erreur sensible, supposer cette densité constante dans toute l'étendue de la trajectoire qu'on a besoin de considérer : R est donc pour chaque corps une certaine fonction de $\frac{ds}{dt}$, que l'on suppose le plus communément proportionnelle au carré de cette vitesse; ensorte que l'on a

$$R = m.\frac{ds^2}{dt^2};$$

m étant un coefficient constant, pendant toute la durée du mouvement. Relativement aux corps sphériques et homogènes, nous avons déjà supposé (n° 208),

$$m = \frac{\mu D'}{Dr};$$

D' représentant la densité de l'air, D celle du corps, r son rayon, et μ un coefficient numérique, le

même pour tous ces corps et donné par l'expérience.

233. Les équations du mouvement qu'il s'agit d'intégrer, deviendront donc, en y mettant pour R sa valeur,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-m.\frac{ds}{dt}.\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-g-m.\frac{ds}{dt}.\frac{dy}{dt}. \qquad (m)$$

La première s'intègre immédiatement et donne

$$\frac{dx}{dt}=C.e^{-ms};$$

e étant la base des logarithmes dont le module est l'unité, et C la constante arbitraire. Au point O, on a $s=0$; la vitesse horizontale $\frac{dx}{dt}$ est égale à $a.\cos.\alpha$, en conservant les dénominations du n° 229; donc $C=a.\cos.\alpha$, et par conséquent

$$\frac{dx}{dt}=a.\cos.\alpha.e^{-ms}.$$

Soit p la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente mT, à la trajectoire, fait avec l'axe des x, de manière qu'on ait $p=\frac{dy}{dx}$; on aura aussi,

$$\frac{dy}{dt}=p.\frac{dx}{dt},$$

et en différentiant,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + p \cdot \frac{d^2x}{dt^2};$$

substituant ces valeurs dans la seconde des équations (m), elle se réduit, en vertu de la première, à

$$\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = -g;$$

divisant cette équation par le carré de la valeur précédente de $\frac{dx}{dt}$, il vient

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g \cdot e^{2ms}}{a^2 \cdot \cos^2 . \alpha}. \qquad (1)$$

Cette nouvelle équation est intégrable. En effet, si l'on multiplie le second membre par ds, et le premier par $dx . \sqrt{1+p^2}$, qui est la même chose que $\sqrt{dx^2+dy^2}$, ou ds, on a

$$dp . \sqrt{1+p^2} = -\frac{g \cdot e^{2ms} . ds}{a^2 . \cos^2 . \alpha};$$

et comme les variables p et s sont séparées dans cette équation, il ne reste plus qu'à intégrer les deux membres par les règles connues ; ce qui donne

$$p\sqrt{1+p^2} + \log . (p+\sqrt{1+p^2}) = c - \frac{g . e^{2ms}}{a^2 m . \cos^2 . \alpha}; \quad (2)$$

c étant la constante arbitraire. On la déterminerait en observant qu'au point de départ on a à la fois

$s=0$, $p=\text{tang.}\,\alpha$; ce qui donne

$$c=\text{tang.}\alpha.\sqrt{1+\text{tang}^2.\alpha}.+\log.(\text{tang.}\alpha+\sqrt{1+\text{tang}^2.\alpha})+\frac{g}{a^2m.\cos^2.\alpha};$$

mais nous conserverons, pour abréger, la lettre c.

Pour déterminer x et y, j'élimine e^{2mu} entre les équations (1) et (2), et j'ai

$$dx=\frac{dp}{m[p\sqrt{1+p^2}+\log.(p+\sqrt{1+p^2})-c]}; \quad (3)$$

et à cause de $dy=pdx$, j'ai aussi

$$dy=\frac{pdp}{m[p\sqrt{1+p^2}+\log.(p+\sqrt{1+p^2})-c]}. \quad (4)$$

Ces équations donneront, par la méthode des quadratures, les valeurs de x et y en fonction de p. On peut encore obtenir une troisième équation qui donnera semblablement le tems en fonction de la même variable. En effet, l'une des équations précédentes donne

$$dt^2=-\frac{dp.dx}{g};$$

substituant donc la valeur de dx et extrayant la racine carrée, il vient

$$dt=-\frac{dp}{\sqrt{mg}.[c-p\sqrt{1+p^2}-\log.(p+\sqrt{1+p^2})]^{\frac{1}{2}}}: \quad (5)$$

je prends ici le signe — devant le radical, parceque

l'angle dont p est la tangente, diminue à mesure que le tems augmente; de sorte que les différentielles dp et dt doivent être des signes contraires.

234. La solution complète du problème qui nous occupe est donnée par les équations (3), (4), (5). Si l'on pouvait intégrer les deux premières sous forme finie, on aurait x et y en fonction de p; éliminant donc p, il resterait une équation en x, y, qui serait celle de la trajectoire; mais les méthodes connues ne s'appliquent point aux expressions de dx et dy, et leur forme ne permet pas d'espérer qu'on parvienne jamais à les intégrer. Néanmoins, nous allons montrer comment les équations (3) et (4) peuvent servir à décrire la trajectoire par points.

Pour abréger, désignons par Fp, le coefficient de dp, dans la valeur de dx, de sorte qu'on ait

$$dx = Fp.dp \quad \text{et} \quad x = \int Fp.dp.$$

Cette intégrale doit être prise de manière qu'elle s'évanouisse au point O, où l'on a $p = \text{tang.}\ \alpha$; l'abscisse d'un point quelconque de la trajectoire est donc égale à la somme des valeurs infiniment petites de $Fp.\,dp$, comprises depuis $p = \text{tang.}\ \alpha$, jusqu'à la valeur de p qui répond au point que l'on considère; par conséquent on aura la valeur de x par approximation, en partageant l'intervalle des valeurs extrêmes de p en un très-grand nombre de parties, égales pour plus de simplicité; calculant ensuite les valeurs de Fp qui répondent à ces divisions, et prenant la somme de ces quantités, multipliées par la

différence très-petite des valeurs consécutives de p, que l'on substituera à la différence infiniment petite dp. Soit donc δ, une très-petite quantité positive ; nous aurons cette suite de valeurs correspondantes :

$p = \text{tang.}\alpha$, $x = 0$;
$p = \text{tang.}\alpha - \delta$, $x = -F(\text{tang.}\alpha - \delta).\delta$;
$p = \text{tang.}\alpha - 2\delta$, $x = -F(\text{tang.}\alpha - \delta).\delta - F(\text{tang.}\alpha - 2\delta).\delta$;
$p = \text{tang.}\alpha - 3\delta$, $x = -F(\text{tang.}\alpha - \delta).\delta - F(\text{tang.}\alpha - 2\delta).\delta - F(\text{tang.}\alpha - 3\delta).\delta$,
etc. etc.

Il est évident que ces valeurs de x approcheront d'autant plus d'être exactes, que la différence δ sera plus petite. En continuant le calcul jusqu'à ce qu'on soit parvenu à $p = 0$, on aura, aussi exactement qu'on voudra, les abscisses de tous les points de la branche ascendante de la trajectoire, et la dernière sera celle du sommet de cette courbe. Au-delà de ce point, dans la branche descendante, les valeurs de p deviendront négatives, et la continuation du même calcul donnera les abscisses des points de cette branche. Par un procédé semblable, appliqué à l'équation (4), on aura les ordonnées qui correspondent à toutes les valeurs positives et négatives de p. En prenant ensuite les valeurs de x et de y qui se rapportent à chaque valeur de p, on construira la courbe entière par points.

L'ordonnée relative à la valeur $p = 0$, exprimera la hauteur du jet ; l'abscisse qui répond à la valeur de p pour laquelle l'ordonnée passe du positif au né-

gatif, sera l'amplitude du jet. La direction de la tangente, en un point quelconque de la trajectoire, sera connue, puisque l'on part de la valeur de p pour trouver les coordonnées de chaque point de cette courbe. La longueur de l'arc correspondant à chaque valeur de p, est aussi donnée par l'équation (2). Quant au tems que le mobile emploie à parcourir cet arc, on le déterminera au moyen de l'équation (5), et par un procédé semblable à celui qui a donné les valeurs de x et de y. Il ne reste donc plus à demander que la vitesse du mobile, en un point quelconque de la trajectoire; or, en la désignant par v, on a

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = (1+p^2) \cdot \frac{dx^2}{dt^2} = g^2(1+p^2) \cdot \frac{dt^2}{dp^2},$$

à cause de l'équation $\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dp}{dt} = -g$, du n° 233; substituant pour $\frac{dt^2}{dp^2}$, sa valeur, tirée de l'équation (5), il vient

$$v^2 = \frac{g(1+p^2)}{m[c - p\sqrt{1+p^2} - \log.(p + \sqrt{1+p^2})]}; \qquad (6)$$

équation qui donnera la vitesse du projectile en fonction de p.

235. Dans l'air, les deux branches de la trajectoire ne sont pas semblables comme dans le vide. La branche descendante jouit d'une propriété remarquable, qui se démontre fort simplement au moyen de nos formules, et qui consiste en ce que

cette branche de courbe a toujours une asymptote verticale.

Pour le prouver, transportons l'origine des coordonnées au sommet de la courbe ; prenons toujours les abscisses horizontales dans le même sens qu'auparavant, et les ordonnées verticales en sens contraire, de manière que Cx' et Cy' soient ces nouveaux axes : x' et y' étant les coordonnées d'un point quelconque rapportées à ces axes, nous aurons, en les comparant aux coordonnées x et y, de ce même point, $x' = OD + x$, $y' = CD - y$; d'où il suit $dx' = dx$, $dy' = -dy$; et si nous faisons $\frac{dy'}{dx'} = p'$, nous aurons aussi $p' = -p$; par conséquent

$$\log.(p + \sqrt{1+p^2}) = \log.(-p' + \sqrt{1+p'^2}) = -\log.(p' + \sqrt{1+p'^2}),$$

à cause que

$$-p' + \sqrt{1+p'^2} = \frac{1}{p' + \sqrt{1+p'^2}}.$$

Les équations (3) et (4) deviendront donc

$$dx' = \frac{dp'}{m[p'\sqrt{1+p'^2} + \log.(p' + \sqrt{1+p'^2}) + c]},$$

$$dy' = \frac{p'dp'}{m[p'\sqrt{1+p'^2} + \log.(p' + \sqrt{1+p'^2}) + c]}.$$

Or, en construisant la branche descendante, au moyen de ces équations et par le procédé du n° précédent, on pourra donner à p' des valeurs positives, aussi grandes que l'on voudra; mais, quand p' sera devenu très-grand, on obtiendra les valeurs appro-

chées de x' et de y' d'une manière plus simple : on mettra alors p' au lieu de $\sqrt{1+p'^2}$; on négligera aussi $\log.(p'+\sqrt{1+p'^2})$, par rapport à p'^2, parce que le logarithme d'un nombre très-grand, est très-petit par rapport à ce nombre; négligeant encore la constante c, par rapport à p'^2, on aura simplement

$$dx' = \frac{dp'}{mp'^2}, \qquad dy' = \frac{dp'}{mp'},$$

et en intégrant,

$$x' = b - \frac{1}{mp'}, \qquad y' = b' + \frac{1}{m}.\log.p';$$

b et b' étant des constantes arbitraires.

Cette valeur de y' n'a pas de limite ; elle croît indéfiniment avec p', quoique dans un moindre rapport. Mais la valeur de l'abscisse horizontale x', ayant pour limite la constante b, nous en devons conclure que la branche descendante a pour asymptote une droite verticale, c'est-à-dire, que si nous prenons sur l'axe Cx', à partir du point C, une partie CE, égale à b, et que nous menions par le point E, la verticale EF, la branche CBK de la trajectoire approchera de cette droite d'aussi près qu'on voudra, sans jamais se confondre rigoureusement avec elle.

236. En mettant de même $-p'$ à la place de p, dans l'équation (5), et faisant les réductions qui sont permises, quand p' devient très-grand, on aura

$$dt = \frac{dp'}{\sqrt{mg.p'}};$$

et en intégrant,

$$t = b'' + \frac{1}{\sqrt{mg}}.\log.p';$$

b'' étant la constante arbitraire.

Éliminant $\log.p'$, entre cette valeur de t et celle de y', il vient,

$$y' = t.\sqrt{\frac{g}{m}} + \text{const.};$$

ce qui nous enseigne que le mouvement du projectile, en même tems qu'il s'approche d'être vertical, tend aussi à devenir uniforme avec une vitesse $\sqrt{\frac{g}{m}}$.

On obtiendrait aussi cette limite de la vitesse, au moyen de l'équation (6); et l'on peut observer qu'elle est la même que nous avons déjà trouvée dans le n° 208.

237. Lorsque l'angle de projection AOx est très-petit (fig. 57), le mobile ne s'élève qu'à une très-petite hauteur au-dessus de l'axe horizontal Ox; or, dans ce cas on peut trouver, par approximation, l'équation en x et y de la portion OCB de la trajectoire, qui est située au-dessus de cet axe.

En effet, dans toute cette partie, la tangente à la courbe est presque horizontale; ce qui rend la quantité p très-petite: en négligeant donc son carré, on aura

$$\sqrt{1+p^2} = 1;$$

d'où il suit

$$dp = dx.\sqrt{1+p^2} = dx, \quad \text{et} \quad s = x;$$

je mets donc x à la place de s dans l'équation (1) du n° 233 ; il vient

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g.e^{2mx}}{a^2.\cos^2.\alpha};$$

l'angle de projection α étant supposé très-petit, on a, à très-peu près, cos. $\alpha = 1$; de plus, j'appelle h la hauteur due à la vitesse initiale a, c'est-à-dire, que je suppose $a^2 = 2gh$ (n° 189) ; on aura donc

$$dp = -\frac{1}{2h}.e^{2mx}.dx;$$

intégrant et déterminant la constante arbitraire par la condition $p = \text{tang}.\alpha$, au point O, où l'on a $x = 0$, on trouve

$$p = \text{tang}.\alpha - \frac{1}{4mh}.(e^{2mx} - 1).$$

Je multiplie cette équation par dx, j'observe que $pdx = dy$, j'intègre ensuite, et je détermine la constante arbitraire de manière qu'on ait, au point O, $x = 0$ et $y = 0$; j'ai, pour résultat,

$$y = x.\text{tang}.\alpha - \frac{1}{8m^2h}.(e^{2mx} - 2mx - 1).$$

C'est l'équation demandée de la courbe OCB ; et l'on peut observer que le premier terme $x.\text{tang}.\alpha$, de cette valeur de y, est l'ordonnée verticale de la droite OA, que le projectile aurait décrite, sans l'action de la pesanteur ; de sorte que le second terme exprime en chaque point de la courbe, la hauteur d'où le mobile est tombé, en vertu de la pesanteur combinée avec la résistance du milieu.

En donnant à x différentes valeurs, les deux dernières équations donneront les valeurs correspondantes de y et de p; ainsi, l'on pourra construire la courbe OCB, et l'on connaîtra de plus la direction de la tangente en chaque point. Ces équations pourront même servir à prolonger la courbe au-delà du point B : elles seront suffisamment exactes, tant que la valeur de p n'aura pas cessé d'être très-petite; mais, passé ce terme, il faudra recourir aux formules rigoureuses du n° 233.

On peut déterminer directement la hauteur du jet, ou la plus grande ordonnée DC; car, au sommet C, on a $p=0$; égalant donc à zéro la valeur précédente de p, et résolvant ensuite l'équation par rapport à e^{2mx}, il vient

$$e^{2mx} = 1 + 4mh.\text{tang}.\alpha;$$

par conséquent

$$x = OD = \frac{1}{2m}.\log.(1 + 4mh.\text{tang}.\alpha);$$

substituant ces valeurs de e^{2mx} et de x, dans celle de y, on aura la valeur de l'ordonnée DC.

Quant à l'amplitude du jet OB, on la déterminera en égalant à zéro la valeur de y; ce qui donne

$$e^{2mx} = 1 + 2mx + 8hm^2.\text{tang}.\alpha.x;$$

équation transcendante, d'où l'on tirera, par approximation, la valeur numérique de x ou de OB, lorsque les quantités h, α et m seront données.

§. III.

§. III. *Mouvement elliptique des Planètes.*

238. Dans le problème que nous venons de r'-soudre, les forces appliquées au mobile nous étaient données, et il s'agissait de déterminer toutes les circonstances de son mouvement; nous allons, dans celui-ci, suivre une marche inverse : nous supposerons connues les lois du mouvement, et nous nous proposerons de déterminer en conséquence la force qui le produit.

Les lois du mouvement des planètes autour du soleil, sont généralement connues sous le nom de *lois de Képler,* parce qu'elles ont été découvertes par cet astronome, qui les a déduites de l'observation. Elles sont au nombre de trois, dont voici les énoncés.

1°. *Les planètes se meuvent dans des courbes planes, et leurs rayons vecteurs décrivent, autour du centre du soleil, des aires proportionnelles au tems.*

2°. *Les orbites* (c'est-à-dire *les trajectoires*) *des planètes sont des ellipses dont le centre du soleil occupe un foyer.*

3°. *Les carrés des tems des révolutions des planètes autour du soleil sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.*

Ces lois se rapportent au mouvement du centre de gravité de chaque planète; c'est donc le mouvement de ce point que nous allons considérer; et quand il sera question de la position ou de la vitesse d'une planète, il faudra entendre la position ou la vitesse de son centre de gravité.

239. La première loi nous montre d'abord que la force accélératrice qui agit sur chaque planète, et qui est appliquée à son centre de gravité, est constamment dirigée suivant la droite qui joint ce centre et celui du soleil (n° 228). La direction de la force étant ainsi connue, voyons comment la seconde loi, combinée avec la première, nous fera connaître son intensité dans les différentes positions de la planète.

Soit $ADBE$ (fig. 58) l'ellipse décrite par la planète, AB son grand axe, C son centre, O l'un de ses deux foyers que nous prendrons pour le centre du soleil; soit aussi m la position de la planète à un instant quelconque, r son rayon vecteur Om, et v l'angle mOx, compris entre ce rayon et une ligne fixe Ox, menée arbitrairement dans le plan de l'orbite : r et v seront les coordonnées polaires d'un point quelconque de l'ellipse, et son équation entre ces coordonnées aura cette forme :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos.(v-\omega)}; \qquad (1)$$

a étant le demi-grand axe CA, ae la distance CO du centre à l'un des foyers, $a.\sqrt{1-e^2}$ le demi-petit axe CD, ω l'angle AOx compris entre le grand axe et la ligne fixe d'où l'on compte l'angle v. Cette équation de l'ellipse se trouve dans la plupart des Traités d'application de l'algèbre à la géométrie, et d'ailleurs elle est facile à déduire de l'équation de la même courbe, en coordonnées ordinaires.

En astronomie, a s'appelle la *distance moyenne* de

la planète; $a(1+e)$ et $a(1-e)$ sont la plus grande et la plus petite distance; e se nomme l'*excentricité* de l'orbite. L'angle variable v est la *longitude* de la planète, comptée dans le plan de l'orbite; l'angle constant ω est la longitude du *périhélie*, ou du point de l'orbite le plus près du soleil : on appelle, au contraire, *aphélie*, le point de l'orbite le plus éloigné du soleil. Enfin, l'angle $v-\omega$, qui exprime la distance angulaire de la planète au périhélie de son orbite, se nomme l'*anomalie vraie* de cette planète.

L'aire décrite pendant l'instant dt, par le rayon r, est égale à $\frac{1}{2}.r^2dv$ (n° 227); on a donc aussi, en vertu de la première loi,

$$r^2dv = cdt; \qquad (2)$$

c étant une quantité constante qui exprime le double de l'aire décrite dans l'unité de tems.

240. Cela posé, désignons par x et y les coordonnées rectangulaires de la planète, rapportées aux axes Ox et Oy, menés par le centre du soleil et dans le plan de l'orbite. Soit R la force accélératrice qui agit sur la planète; nous savons déjà que cette force est dirigée suivant la droite Om; ses composantes, parallèles aux axes des coordonnées, seront donc $R.\frac{x}{r}$ et $R.\frac{y}{r}$; car on voit sans peine que $\frac{x}{r}$ et $\frac{y}{r}$ sont les cosinus des angles mOx et mOy. De plus, la courbe décrite étant concave vers le centre du soleil, il est évident que la force qui produit le mouvement, doit être dirigée vers ce point; ses composantes tendront

donc à diminuer les coordonnées x et y; par conséquent les équations du mouvement (n° 219) seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R.\frac{x}{r}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -R.\frac{y}{r}.$$

Multiplions la première équation par $2dx$, la seconde par $2dy$; ajoutons-les ensuite; intégrons et représentons par b la constante arbitraire, nous aurons

$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = b - 2\int Rdr, \qquad (3)$$

en faisant attention que l'on a

$$x^2+y^2=r^2 \quad \text{et} \quad xdx+ydy=rdr.$$

Comme nous avons pris pour axe des x, la ligne Ox, d'où l'on compte l'angle v, on a aussi

$$x=r.\cos.v, \quad y=r.\sin.v;$$

d'où l'on tire

$$dx^2+dy^2=dr^2+r^2dv^2.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (3), et éliminant dt, au moyen de l'équation (2), il vient

$$\frac{c^2}{r^4}.\frac{dr^2}{dv^2}+\frac{c^2}{r^2}=b-2\int Rdr. \qquad (4)$$

Si la force R nous était donnée en fonction de r, cette équation serait celle de la trajectoire; sa comparaison avec l'équation (1), doit donc nous servir à déterminer cette force.

Or, l'équation (1) peut s'écrire ainsi:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e.\cos.(v - \varpi)}{a(1 - e^2)};$$

en la différentiant, on a

$$\frac{1}{r^2}.\frac{dr}{dv} = \frac{e.\sin.(v - \varpi)}{a(1 - e^2)};$$

ou bien, en élevant au carré,

$$\frac{1}{r^4}.\frac{dr^2}{dv^2} = \frac{e^2.\sin^2.(v - \varpi)}{a^2(1 - e^2)^2} = \frac{e^2}{a^2(1 - e^2)^2} - \frac{e^2.\cos^2.(v - \varpi)}{a^2(1 - e^2)^2};$$

mais l'équation (1) donne aussi

$$\frac{e^2.\cos^2.(v - \varpi)}{a^2(1 - e^2)^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2}{a(1 - e^2)}.\frac{1}{r} + \frac{1}{a^2(1 - e^2)^2};$$

donc

$$\frac{1}{r^4}.\frac{dr^2}{dv^2} = \frac{2}{a(1 - e^2)}.\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2(1 - e^2)};$$

ce qui change l'équation (4) en celle-ci :

$$\frac{2c^2}{a(1 - e^2)}.\frac{1}{r} - \frac{c^2}{a^2(1 - e^2)} = b - 2fRdr;$$

d'où l'on tire, par la différentiation,

$$R = \frac{\mu}{r^2},$$

en faisant, pour abréger,

$$\mu = \frac{c^2}{a(1 - e^2)}.$$

Ainsi, l'intensité de la force R, qui retient une

planète dans son orbite, est en raison inverse du carré de son rayon vecteur. C'est donc par la combinaison d'une force accélératrice, variable suivant cette loi, avec une impulsion primitive, que chaque planète décrit autour du soleil, une ellipse dont cet astre occupe un foyer. La quantité μ exprime l'intensité de cette force à l'unité de distance; et comme elle dépend des trois quantités a, e, c, qui ont des valeurs particulières pour chaque planète, nous ne pouvons décider si elle change ou si elle reste la même, en passant d'un planète à une autre. Pour résoudre cette nouvelle question, il est nécessaire de recourir à la troisième loi de *Képler,* dont nous n'avons point encore fait usage.

241. Soit T le tems de la révolution d'une planète autour du soleil; cT sera le double de l'aire décrite pendant ce tems, par son rayon vecteur; car les aires sont proportionnelles au tems employé à les décrire, et c exprime le double de l'aire décrite dans l'unité de tems. Mais pendant le tems T, le rayon vecteur décrit la surface entière de l'ellipse, qui est égale, comme on sait, au produit des deux demi-axes, multiplié par le rapport de la circonférence au diamètre; en désignant donc ce rapport par π, et observant que les demi-axes sont a et $a.\sqrt{1-e^2}$, nous aurons $\pi a^2.\sqrt{1-e^2}$, pour l'aire correspondante au tems T, et par conséquent

$$cT = 2\pi a^2.\sqrt{1-e^2}.$$

Je tire de là la valeur de c, et je la substitue dans

celle de μ; il vient

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Relativement à une autre planète, soit T' le tems de la révolution, a' le demi-grand axe, et μ' ce que devient μ; nous aurons de même :

$$\mu' = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2}.$$

Mais, d'après la troisième loi de *Képler*, on a

$$T^2 : T'^2 :: a^3 : a'^3;$$

donc $\mu' = \mu$.

L'intensité de la force accélératrice, qui agit sur les planètes, est donc la même pour tous ces corps, à l'unité de distance. Cette force ne varie, d'une planète à une autre, qu'à raison de la différence de leurs distances au soleil, et suivant la même loi, qu'en passant d'une position à une autre, de la même planète; par conséquent si l'on conçoit deux planètes placées à la même distance de cet astre, elles seront soumises à la même force accélératrice, et, abandonnées à elles-mêmes, sans vîtesse initiale, elles prendront le même mouvement, chacune suivant la droite qui joint son centre à celui du soleil; d'où il résulte une analogie remarquable entre la force qui retient les planètes dans leurs orbites, et la pesanteur terrestre qui imprime aussi le même mouvement à tous les corps placés à la même distance du centre de la terre.

242. Il ne suffit pas de connaître la nature des orbites planétaires qui nous est donnée par l'observation; il faut encore avoir la valeur de l'une ou de l'autre des coordonnées r et v, en fonction du tems, afin de pouvoir assigner, à chaque instant, la position du mobile sur sa trajectoire. On trouverait aisément cette valeur, en combinant ensemble les équations (1) et (2) du n° 239; mais nous allons reprendre en entier et dans un ordre inverse, le problème du mouvement des planètes autour du soleil : nous supposerons donnée, la loi de la force accélératrice, et nous chercherons, à la fois, la courbe décrite et la loi du mouvement sur cette courbe.

243. Représentons toujours par r, le rayon vecteur du centre de la planète à un instant quelconque, et par $\frac{\mu}{r^2}$, la force accélératrice dirigée suivant ce rayon, μ étant un coefficient constant et positif. Il est évident qu'un point matériel, projeté dans l'espace suivant une droite quelconque, et soumis à l'action d'une force constamment dirigée vers un point fixe, doit se mouvoir dans le plan de cette droite et de celle qui le joignoit au point fixe, à l'instant de sa projection; car, tout étant semblable de part et d'autre de ce plan, il n'y a pas de raison pour que le mobile s'en écarte jamais. L'orbite de chaque planète est donc une courbe plane, et son plan est celui qui passait, à l'origine du mouvement, par le rayon vecteur et par la direction de la vitesse. Menons dans ce plan, par le centre du soleil,

les deux axes rectangulaires Ox et Oy (fig. 58), qui seront ceux des coordonnées x et y du mobile; les composantes parallèles à ces axes, de la force $\frac{\mu}{r^2}$, seront $\frac{\mu x}{r^3}$ et $\frac{\mu y}{r^3}$; et comme elles tendent visiblement à diminuer les coordonnées x et y du mobile, nous aurons, pour les deux équations du mouvement (n° 219),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3};$$

dt étant toujours l'élément du tems.

On en déduit, sans difficulté (n°s 224 et 226), ces deux intégrales premières,

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + b = 0, \quad xdy - ydx = cdt;$$

b et c étant les constantes arbitraires. Si l'on fait usage des coordonnées polaires r et v, comme dans le n° 239, et que l'angle v soit compté de l'axe Ox, on aura $x = r.\cos.v$, $y = r.\sin.v$, et ces équations deviendront

$$\frac{dr^2 + r^2dv^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + b = 0, \quad r^2dv = cdt. \qquad (a)$$

Éliminant dt entre elles, et faisant, pour abréger, $\frac{1}{r} = z$, il vient

$$c^2.\frac{dz^2}{dv^2} + c^2z^2 - 2\mu z + b = 0,$$

pour l'équation différentielle de la trajectoire. En la

résolvant, par rapport à dv, on a

$$dv = \frac{cdz}{\sqrt{2\mu z - b - c^2z^2}} = \frac{\frac{c^2}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}}.dz}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu - c^2z}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}}\right)^2}};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$v = \varpi + \text{arc.}\left(\cos. = \frac{\mu - c^2z}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}}\right);$$

ϖ étant la constante arbitraire. On aura donc réciproquement

$$c^2z = \mu - \sqrt{\mu^2 - bc^2}.\cos.(v - \varpi);$$

ou bien, en remettant $\frac{1}{r}$ à la place de z,

$$c^2 = \mu r + \sqrt{\mu^2 - bc^2}.r.\cos.(v - \varpi). \qquad (b)$$

A cause de l'angle arbitraire ϖ, il est permis de changer le signe du radical $\sqrt{\mu^2 - bc^2}$, et de le prendre avec le signe $+$, car cela revient évidemment à augmenter ϖ de deux angles droits.

D'après cette équation, on pourrait déjà voir que la trajectoire est une section conique; mais on s'en assurera plus aisément, en transformant les coordonnées polaires en coordonnées orthogonales.

244. Menons par le centre du soleil, dans le plan de l'orbite, les axes rectangulaires Ox' et Oy', et supposons que l'axe Ox' fait avec la droite Ox, d'où l'on compte l'angle v, un angle $x'Ox$ égal à la cons-

tante ω. Soient x' et y' les coordonnées de la planète, rapportées à ces nouveaux axes; le rayon vecteur r fera avec l'axe Ox', un angle $v-\omega$; par conséquent, on aura,

$$x'=r.\cos.(v-\omega),\quad y'=r.\sin.(v-\omega),\quad r=\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

L'équation (b) deviendra donc

$$c^2=\mu.\sqrt{x'^2+y'^2}+x'.\sqrt{\mu^2-bc^2};$$

et, en faisant disparaître le radical $\sqrt{x'^2+y'^2}$ on aura

$$\mu^2y'^2+bc^2x'^2=c^4-2c^2x'.\sqrt{\mu^2-bc^2}.$$

Cette équation appartient à l'ellipse, à l'hyperbole, ou à la parabole, selon que la constante b est positive, négative, ou nulle; et comme, d'après l'équation précédente, le rayon vecteur $\sqrt{x'^2+y'^2}$ s'exprime sous forme rationnelle, en fonction de l'abscisse x', il s'ensuit que l'origine des coordonnées x' et y', est placée dans les trois cas, à l'un des foyers de la courbe.

Ainsi, un point matériel attiré vers un point fixe, en raison inverse du carré des distances, décrit une section conique dont ce point occupe un foyer. La nature et les dimensions de la section conique décrite, dépendent des constantes arbitraires b et c, qui dépendent elles-mêmes des conditions initiales du mouvement, comme on va le voir, en déterminant ces constantes.

245. Soit, à l'origine du mouvement, l la distance

du mobile au point fixe, ou la valeur de r; V la vitesse du mobile, c'est-à-dire, la valeur de $\frac{\sqrt{dr^2+r^2dv^2}}{dt}$; enfin θ l'angle que cette vitesse fait avec le rayon vecteur; $V.\cos.\theta$ sera la vitesse V décomposée suivant ce rayon, ou la valeur de $\frac{dr}{dt}$, qui répond à cet instant; de sorte qu'on aura à la fois

$$r=l,\quad \frac{dr}{dt}=V.\cos.\theta,\quad \frac{dr^2+r^2dv^2}{dt^2}=V^2;$$

d'où l'on tire facilement

$$\frac{dv}{dt}=\frac{V.\sin.\theta}{l}.$$

Substituant donc ces valeurs de r, $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$, dans les deux équations (a), il vient

$$b=\frac{2\mu}{l}-V^2,\quad c=Vl.\sin.\theta.$$

On voit par là que la constante b sera positive, négative ou nulle, selon qu'on aura $V^2<\frac{2\mu}{l}$, $V^2>\frac{2\mu}{l}$, ou $V^2=\frac{2\mu}{l}$. Il s'ensuit donc que la nature de la section conique qui sera décrite par le mobile, ne dépendra que de sa vitesse et de sa distance initiales : elle sera indépendante de la direction de cette vitesse; mais l'angle θ influera sur les dimensions de cette courbe, puisqu'il entre dans la valeur de c.

L'observation avait appris que les planètes décrivent des ellipses dont le soleil occupe un foyer;

on en a conclu que la force qui les sollicite vers le centre de cet astre est en raison inverse du carré du rayon vecteur ; maintenant l'analyse nous montre qu'une telle force accélératrice, combinée avec une impulsion primitive convenable, peut faire décrire à un point matériel, non-senlement une ellipse, mais encore une hyperbole ou une parabole : il est donc possible qu'il existe dans la nature, des astres visibles une seule fois pour nous, parce qu'ils ont reçu, à l'origine de leur mouvement, la vitesse nécessaire pour décrire une parabole ou une hyperbole.

246. Considérons, en particulier, le cas de l'ellipse, et déterminons, pour ce cas, les ordonnées r et v, en fonction du tems.

En éliminant dv entre les deux équations (a), on trouve

$$\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{c^2}{r^2}-\frac{2\mu}{r}+b=0. \qquad (c)$$

D'où l'on conclut d'abord que la plus grande et la plus petite valeur de r, qui ont lieu quand on a $\frac{dr}{dt}=0$, seront données par cette équation du second degré

$$r^2-\frac{2\mu}{b}.r+\frac{c^2}{b}=0.$$

Si donc on désigne ces valeurs, comme dans le n° 239, par $a(1+e)$ et $a(1-e)$, leur somme $2a$ sera égale au coefficient $\frac{2\mu}{b}$, et leur produit $a^2(1-e^2)$

sera égal au dernier terme $\frac{c^2}{b}$; ce qui donne

$$b = \frac{\mu}{a}, \quad c^2 = \mu a(1 - e^2).$$

C'est ce qu'on aurait aussi trouvé en comparant l'équation (1) du n° 239, à l'équation (b) du n° 243. En effet, pour que ces deux équations de la trajectoire coïncident, il faut faire

$$\frac{c^2}{\mu} = a(1 - e^2), \quad \frac{\sqrt{\mu^2 - bc^2}}{\mu} = e;$$

d'où l'on tire les valeurs précédentes de b et de c^2.

Substituant ces valeurs dans l'équation (c), et la résolvant par rapport à dt, il vient

$$dt = \frac{\sqrt{\frac{a}{\mu}}.rdr}{\sqrt{2ar - r^2 - a^2 + a^2e^2}}.$$

Or, on fait disparaître le radical qui entre dans cette valeur de dt, en prenant

$$r = a(1 - e.\cos.u),$$

u étant une nouvelle variable; car on a alors

$$dr = ae.\sin.u.du, \quad a^2e^2 - (r - a)^2 = a^2e^2.\sin^2.u,$$

et par conséquent

$$dt = (1 - e.\cos.u).\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}.du.$$

En faisant, pour abréger $\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}=n$, et en intégrant, on aura

$$nt=u-e.\sin.u+\text{const.}$$

Cette équation donnera la valeur de u en fonction de t; on aura ensuite la valeur de r, au moyen de l'équation $r=a(1-e.\cos.u)$; et enfin la valeur de v sera donnée par l'équation de la trajectoire. Les valeurs de r et de v étant ainsi exprimées en fonction du tems, on pourra déterminer, à un instant quelconque, la position de la planète dans son orbite.

L'excentricité des orbites planétaires est, en général, une fraction très-petite; ce qui permet de réduire les valeurs de u, r et v, en séries très-convergentes, ordonnées suivant les puissances de e. Si l'on borne l'approximation à la première puissance, il ne sera pas nécessaire d'employer la quantité auxiliaire u, pour avoir les valeurs de r et de v; on les obtiendra très-simplement de la manière suivante.

247. En négligeant le carré de e, l'équation de l'orbite elliptique, ou l'équation (1) du n° 239, donne

$$r^2=a^2[1-2e.\cos.(v-\varpi)];$$

je substitue cette valeur dans l'équation (2) du même n°, savoir:

$$r^2dv=cdt=\sqrt{\mu a(1-e^2)}.dt;$$

en négligeant toujours e^2, et faisant pour abréger $\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}=n$, il vient

$$[1-2e.\cos.(v-\varpi)].dv=ndt;$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$v - 2e.\sin.(v - \varpi) = nt + k;$$

k étant la constante arbitraire.

Pour simplifier, je fais les constantes ϖ et k égales à zéro ; ce qui revient à compter l'angle v, à partir de la droite Ox', qui coïncide avec la partie OA du grand axe et qui passe par le périhélie, et le tems t, à partir de l'instant du passage de la planète par ce point, de manière qu'on ait, à la fois, $t=0$ et $v=0$, au point A. On aura alors $v=nt+2e.\sin.v$; par conséquent v est égal à nt, quand on néglige la quantité e; lors donc qu'on néglige seulement son carré, on a

$$v = nt + 2e.\sin.nt.$$

La valeur correspondante du rayon vecteur r, déduite de la valeur précédente de r^2, est

$$r = a(1 - e.\cos.nt).$$

Au moyen de ces deux équations, on aura, à chaque instant, la position de la planète dans son plan.

248. Pour représenter le mouvement de la planète, les astronomes imaginent un astre fictif, qui se meut circulairement autour du soleil, dans le plan de l'orbite; qui part du périhélie au même instant que la planète, et dont la distance angulaire à ce point est toujours égale au premier terme nt de la valeur de v. Le rayon vecteur de cet astre se meut uniformément, et fait à chaque instant, avec celui de

la

la planète, un angle égal à $2e.\sin.nt$. Cet angle variable s'appelle l'*équation du centre*. Lorsque l'angle v est égal à deux ou à quatre angles droits, les deux angles v et nt sont égaux; par conséquent l'astre fictif passe à l'aphélie et revient au périhélie, en même tems que la planète; mais dans la première moitié de la révolution, la planète précède l'astre, et dans la seconde, l'astre précède la planète. Si l'on nomme T le tems d'une révolution entière, qui est achevée quand l'angle nt est devenu égal à quatre angles droits, on aura $nT = 2\pi$, π désignant la demi-circonférence pour le rayon un. En remettant pour le coefficient n, ce qu'il représente, cette équation donne

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu};$$

résultat qui s'accorde avec celui du n° 241.

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE COURBE DONNÉE.

§. Ier. *Théorie générale de ce Mouvement.*

249. Lorsqu'un point matériel est astreint à se mouvoir sur une courbe donnée, à double ou à simple courbure, la résistance que cette courbe oppose à son mouvement, équivaut à une force qui agirait continuellement sur le mobile dans une direction perpendiculaire à la trajectoire, de manière qu'en ajoutant aux forces données dans chaque cas particulier, une nouvelle force accélératrice, pour représenter cette résistance, on peut ensuite faire abstraction de la courbe, et considérer le mobile comme un point matériel libre.

En effet, si l'on décompose chacune des forces accélératrices données, qui agissent sur le mobile, en deux autres, l'une dirigée suivant la tangente à la trajectoire, l'autre perpendiculaire à cette droite, les forces tangentes auront seules leur effet, et les forces normales seront détruites par la résistance de la courbe. La résultante de ces dernières forces, que j'appellerai P, exprimera la pression que les forces données exercent sur la courbe, en chacun de ses points; et la résistance qui détruit cette pression, sera une

force accélératrice égale et contraire à la force P. Cette pression P serait la seule que la courbe supporterait, si le mobile était en repos; mais son état de mouvement fait naître une autre pression, provenant de la tendance continuelle du mobile à s'échapper suivant la tangente à sa trajectoire.

Pour le faire voir, partageons la courbe donnée en une infinité d'élémens infiniment petits, que nous regarderons comme des lignes droites, et considérons le mobile dans son passage d'un élément à l'autre. Soient $m\mu$ et mm' (fig. 59), ces deux élémens consécutifs; mt, $m't'$ leurs prolongemens, ou les tangentes aux points m et m'. L'angle tmt' s'appelle l'*angle de contingence* de la courbe au point m. Il est toujours infiniment petit dans les courbes continues : nous supposerons que la courbe donnée est de cette espèce, et nous désignerons l'angle tmt' par ω. Le plan des deux élémens consécutifs $m\mu$ et mm', ou des deux tangentes mt et mt', se nomme le *plan osculateur* de la courbe au point m. Quand la courbe est à double courbure, ce plan varie d'un point à un autre; quand elle est plane, le plan osculateur n'est plus autre chose que le plan même de la courbe.

Après avoir rappelé ces définitions, représentons par v la vitesse du mobile, quand il arrive au point m; la direction de cette vitesse sera la ligne mt; et si on la décompose dans le plan osculateur en deux autres, l'une suivant le côté mm' de la courbe, l'autre perpendiculaire à mm', et dirigée suivant mp, on aura $v \cdot \cos. \omega$ et $v \cdot \sin. \omega$, pour ses deux com-

posantes. La seconde est détruite par la résistance de la courbe; or, la quantité $v.\sin.\omega$ étant infiniment petite, à cause du facteur $\sin.\omega$, nous pouvons concevoir une force, du genre des forces accélératrices, qui agisse continuellement sur le mobile et qui lui imprime, en chaque point de sa trajectoire, une vitesse de même grandeur et de même direction que cette seconde composante : en désignant cette force par Q, la résistance de la courbe qui détruit cette vitesse $v.\sin.\omega$, équivaudra à une force accélératrice égale et contraire à la force Q.

Quant à l'autre composante $v.\cos.\omega$, elle exprime la vitesse avec laquelle le mobile commence à se mouvoir sur le côté mm'; la vitesse, en passant d'un élément au suivant, se trouve donc diminuée de la quantité $v - v.\cos.\omega$, qui est la même chose que $2v.\sin^2.\frac{\omega}{2}$; or, on peut attribuer cette diminution de vitesse à une seconde force accélératrice, agissant suivant la tangente à la trajectoire, et en sens contraire du mouvement; d'où il semble d'abord qu'on devrait joindre cette force tangente à la force normale, pour remplacer complètement la résistance de la courbe donnée. Mais en appelant Q', la force tangente, et en la comparant à la force normale Q, elles seront entre elles comme les vitesses $2v.\sin^2.\frac{\omega}{2}$ et $v.\sin.\omega$ qui leur correspondent; et comme le rapport de la première à la seconde est égal à $\text{tang}.\frac{\omega}{2}$, et par conséquent infiniment petit, il s'ensuit que la force Q' est aussi

infiniment petite, et doit être négligée relativement à la force Q. Ainsi, dans le calcul on n'aura égard qu'à la force Q, et l'on ne tiendra aucun compte de la force Q'.

Concluons donc que la pression totale qu'un corps en mouvement exerce sur la courbe qu'il est forcé de décrire, est la résultante de deux forces normales Q et P, dont la première est due à la vitesse du mobile, et la seconde aux forces accélératrices qui lui sont appliquées. La résistance de la courbe est une force accélératrice, égale et contraire à cette résultante.

250. Nous n'avons pas besoin de connaître cette résistance, pour former les équations du mouvement : il nous suffit de savoir qu'elle peut être assimilée aux autres forces accélératrices qui sollicitent le mobile, et que sa direction est normale à la trajectoire. En effet, conservons les dénominations du n° 219; de sorte que x, y, z, soient les coordonnées rectangulaires du mobile, qui correspondent au tems quelconque t, et X, Y, Z, les forces parallèles aux axes des x, des y et des z. Soit en outre N la force normale qui représente la résistance de la courbe donnée; $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, les angles que sa direction fait avec les axes des coordonnées, lesquels angles sont comptés comme on en est convenu au commencement de ce Traité (n° 5); on aura l'équation de condition

$$\cos^2.\varepsilon + \cos^2.\varepsilon' + \cos^2.\varepsilon'' = 1. \qquad (1)$$

De plus, la direction de la force N et la tangente à la

trajectoire, en un même point de cette courbe, étant deux droites perpendiculaires entre elles, on aura aussi (n° 78)

$$\frac{dx}{ds}.\cos.\varepsilon + \frac{dy}{ds}.\cos.\varepsilon' + \frac{dz}{ds}.\cos.\varepsilon'' = 0; \qquad (2)$$

car, ds représentant l'élément de la courbe, $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, sont les cosinus des angles que fait la seconde droite avec les axes des coordonnées. Les composantes de la force N, parallèles à ces axes, seront $N.\cos.\varepsilon$, $N.\cos.\varepsilon'$, $N.\cos.\varepsilon''$; les équations (m) du n° 219, deviendront donc, en ayant égard à la force N,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X + N.\cos.\varepsilon, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N.\cos.\varepsilon', \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N.\cos.\varepsilon''. \end{aligned}\right\} \qquad (m)$$

Si l'on élimine entre ces cinq équations, les quatre inconnues N, ε, ε', ε'', il restera une équation différentielle du second ordre, entre x, y, z et t : en la joignant aux deux équations de la trajectoire, qui sont données dans chaque cas particulier, on aura autant d'équations qu'il en faut pour déterminer les coordonnées du mobile en fonction du tems.

251. L'élimination des quatre quantités N, ε, ε', ε'', se fait immédiatement, en ajoutant les équations (m), après avoir multiplié la première par dx,

la deuxième par dy, la troisième par dz; ce qui donne, en ayant égard à l'équation (2),

$$\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} = Xdx + Ydy + Zdz; \quad (3)$$

équation indépendante de la force N et de sa direction.

En observant que $dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = dsd^2s$, on peut mettre cette équation sous cette autre forme :

$$\frac{d^2s}{dt^2}. = X.\frac{dx}{ds}. + Y.\frac{dy}{ds}. + Z.\frac{dz}{ds};$$

et l'on en conclut, comme dans le n° 223, que la force accélératrice du mobile, décomposée suivant la tangente à la trajectoire, a pour expression le second coefficient différentiel de l'arc s, considéré comme une fonction du tems; ensorte que cette expression convient également au cas où le mobile est libre et à celui où il est astreint à se mouvoir sur une courbe donnée.

252. Si la formule $Xdx + Ydy + Zdz$ est une différentielle exacte à trois variables x, y, z, et que l'on représente son intégrale par $f(x, y, z)$, on aura, en intégrant l'équation (3),

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2f(x, y, z) + C; \quad (4)$$

C étant la constante arbitraire.

Au moyen des équations de la trajectoire, qui donnent deux de trois coordonnées, en fonction de la troisième, par exemple, z et y, en fonction de

x, on pourra toujours éliminer z et y, dans cette équation. Cela fait, on aura une équation entre x, dx et dt, d'où l'on tirera, en la résolvant par rapport à dt, une valeur de cette forme $dt = Fx \,.\, dx$; il ne restera donc plus qu'à intégrer la formule $Fx.dx$, pour avoir t en fonction de x, et réciproquement x en fonction de t.

Lors donc que la formule $Xdx + Ydy + Zdz$ sera une différentielle exacte à trois variables, la détermination du mouvement d'un corps sur une courbe donnée, se réduira en définitif à intégrer une fonction d'une seule variable; intégration qui se rapporte à la méthode des quadratures.

Mais si l'on comprend au nombre des forces accélératrices qui agissent sur le mobile, la résistance d'un fluide, ou un frottement, la formule $Xdx + Ydy + Zdz$ ne sera plus une différentielle exacte; dans ce cas, il est aisé de faire voir que la solution du problème exige l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre, et, en outre, celle d'une fonction d'une seule variable : nous en donnerons dans la suite un exemple.

253. Lorsque l'équation (4) a lieu, on en déduit plusieurs conséquences importantes, relativement à la vitesse du mobile. Supposons d'abord $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, nous aurons aussi $f(x, y, z) = 0$, et par conséquent, le carré de la vitesse égal à la constante C. Il s'ensuit donc qu'un point matériel qui se meut sur une courbe donnée, et qui n'est sollicité par aucune force accélératrice, conserve la même vitesse pendant toute la durée

de son mouvement. C'est, en effet, ce qu'on pouvait prévoir d'après le raisonnement du n° 249, où l'on a vu que la diminution de vîtesse, en passant d'un élément à l'autre de la trajectoire, n'est qu'une quantité infiniment petite du second ordre ; de manière que, répétée une infinité de fois sur un nombre infini d'élémens, ou sur un arc d'une longueur finie, il n'en peut jamais résulter qu'une diminution infiniment petite. Mais on ne doit pas oublier que ce résultat suppose la courbe continue; car, si elle était formée par un assemblage de droites et de portions de lignes courbes, qui fissent des angles finis à leurs points de jonction, le mobile éprouverait une perte de vîtesse, en chacun de ces points, qui serait proportionnelle au carré du sinus de la moitié de l'angle de contingence.

La vîtesse v étant constante, en intégrant l'équation $ds=vdt$, on aura $s=vt$. La variable s désigne ici la longueur de l'arc parcouru dans le tems t ; ainsi, les espaces parcourus sur la courbe, en tems égaux, sont égaux, et la vîtesse de ce mouvement curviligne et uniforme, est égale à l'espace parcouru dans l'unité de temps, comme dans le mouvement rectiligne de la même espèce.

254. Si les forces X, Y, Z ne sont pas nulles, la vîtesse du mobile n'est plus constante, mais elle est indépendante de la courbe qu'il est forcé de décrire. En effet, en désignant par v la vîtesse correspondante aux coordonnées x, y, z, et par A, celle qui répond aux coordonnées a, b, c, on con-

clut de l'équation (4), celle-ci :

$$v^2 - A^2 = 2f(x, y, z) - 2f(a, b, c);$$

qui nous fait voir que l'augmentation du carré de la vitesse, en passant d'un point à un autre de la trajectoire, ne dépend que des coordonnées de ces points et de la forme de la fonction indiquée par f, et nullement de la forme de cette courbe. Ce théorème est le même que nous avons déjà démontré (n° 224) à l'égard d'un point matériel libre.

On voit aussi, d'après cette équation, que si plusieurs corps, soumis aux mêmes forces accélératrices, partent du point dont les coordonnées sont a, b, c, avec la vitesse A, et se meuvent sur des courbes différentes, ils auront tous la même vitesse quand ils atteindront la surface qui a pour équation

$$f(x, y, z) = B;$$

B étant une constante donnée : cette vitesse sera égale à $\sqrt{A^2 + 2B - 2f(a, b, c)}$.

Supposons, par exemple, que la seule force qui agit sur tous ces corps, soit la pesanteur que nous désignerons par g; prenons l'axe z vertical, et dirigé dans le sens de cette force; nous aurons $Z = g$, $X = 0$, $Y = 0$; par conséquent $f(x, y, z)$, qui représente l'intégrale de $Xdx + Ydy + Zdz$, sera égale dans ce cas particulier à gz, et la surface correspondante à l'équation $f(x, y, z) = B$, sera un plan horizontal. Il en faut donc conclure que si un nombre quelconque de corps pesans glissent sur des courbes différentes, et partent d'un même point

avec la même vitesse, ils auront encore des vitesses égales, quand ils atteindront un plan horizontal donné; résultat qui est une extension de celui du n° 192.

255. Occupons-nous maintenant de déterminer la pression que le mobile exerce sur chaque point de sa trajectoire. Pour cela, il faut d'abord trouver les deux forces que nous avons appelées P et Q, dans le n° 249, et en prendre ensuite la résultante. Dans chaque cas particulier, il sera aisé de déterminer la force P et sa direction : les forces X, Y et Z étant données, on commencera d'abord par en prendre la résultante; par la direction de cette force et par la tangente à la trajectoire, au point que l'on considère, on mènera un plan, dans lequel on décomposera cette résultante en deux forces, l'une dirigée suivant la tangente, l'autre perpendiculaire à cette ligne : cette dernière composante sera la force P. Quant à la force Q, nous savons qu'elle imprime à chaque instant, au mobile, la vitesse infiniment petite $v.\sin.\omega$: or, une force accélératrice a pour mesure l'élément de vitesse qu'elle produit, divisé par l'élément du tems (n° 198); on aura donc $Q=\frac{v.\sin.\omega}{dt}$, ou bien $Q=\frac{v\omega}{dt}$, en observant que l'arc infiniment petit ω, peut être pris à la place de son sinus. Mais on démontre dans le calcul différentiel, et nous avons déjà eu occasion de faire voir (n° 154), que l'angle de contingence, en un point quelconque, est égal à l'élément de la courbe divisé par son rayon de courbure au même point; on a donc, en appelant γ ce rayon, $\omega=\frac{ds}{\gamma}$,

et par conséquent $Q = \frac{v}{\gamma} \cdot \frac{ds}{dt}$, ou, ce qui est la même chose,

$$Q = \frac{v^2}{\gamma},$$

à cause que la vitesse v est égale à $\frac{ds}{dt}$.

Cette partie de la pression, qui est due à la vitesse dont le mobile est animé, est ce qu'on appelle la *force centrifuge*. On voit que l'intensité de cette force est en raison directe du carré de la vitesse et inverse du rayon de courbure de la trajectoire. Sa direction, au point quelconque m (fig. 59), coïncide avec la normale comprise dans le plan osculateur, savoir, avec la partie mp de cette droite qui tombe hors de la concavité de la courbe; en sorte que cette force est dirigée de manière qu'elle tend à éloigner le mobile du centre de courbure. En effet, cette direction doit être celle de la vitesse $v.\sin.\omega$, que la force Q est censée imprimer au mobile, quand il arrive au point m, et l'on a vu, dans le n° 249, que cette composante de la vitesse v est dirigée suivant la droite mp.

Les deux forces P et Q étant ainsi connues, en grandeur et en direction, on achevera de trouver la pression totale, en prenant leur résultante par la règle du parallélogramme des forces.

256. Lorsque la trajectoire est une courbe plane, et que toutes les forces qui agissent sur le mobile, sont comprises dans son plan, les deux forces P et Q sont dirigées suivant la même droite, et la pression est égale à leur somme ou à leur différence, selon que

ces deux forces agissent dans le même sens ou en sens contraires. Dans ce cas, appelons R, la résultante des forces appliquées au mobile, et θ, l'angle aigu ou obtus que sa direction fait avec la partie de la normale au point m, qui tombe dans la concavité de la courbe, savoir, avec la droite mp'; nous aurons $R.\cos.\theta$, pour la valeur de P, et la pression en ce point sera égale, abstraction faite du signe, à

$$\frac{v^2}{\gamma} - R.\cos.\theta;$$

de plus, cette force s'exercera suivant mp, comme la force centrifuge, ou en sens contraire, suivant mp', selon que cette quantité sera positive ou négative.

257. La force N, qui entre dans les équations générales du mouvement, est maintenant connue en grandeur et en direction, puisqu'elle est égale et contraire à la pression que nous venons de déterminer; cependant il est bon de montrer qu'on peut aussi déduire de ces équations même, la grandeur et la direction de cette force; mais, pour ne pas compliquer la question, nous nous bornerons au cas du n° précédent, où la trajectoire est plane, et où les forces appliquées au mobile sont toutes dirigées dans son plan.

En prenant ce plan pour celui des x, y, nous aurons $z=0$, $Z=0$, $\varepsilon''=100°$, et les cinq équations du n° 250, se réduiront à quatre, savoir :

$$\cos^2.\varepsilon + \cos^2.\varepsilon' = 1, \quad \frac{dx}{ds}.\cos.\varepsilon + \frac{dy}{ds}.\cos.\varepsilon' = 0,$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N.\cos.\varepsilon, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N.\cos.\varepsilon'.$$

Il s'agit donc de tirer de ces équations la valeur de N, qui doit être essentiellement positive (n° 10), et les valeurs des angles ε et ε', qui déterminent la direction de cette force par rapport aux axes des x et des y. Or, les deux premières donnent d'abord

$$\cos.\varepsilon = \pm \frac{dy}{ds}, \quad \cos.\varepsilon' = \mp \frac{dx}{ds};$$

les signes supérieurs doivent être pris ensemble, et les signes inférieurs aussi ensemble ; la condition de N positive fera connaître, comme on va le voir, dans quels cas on doit prendre les uns ou les autres.

En substituant ces valeurs de $\cos.\varepsilon$ et $\cos.\varepsilon'$, dans les deux autres équations, il vient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X \pm N.\frac{dy}{ds}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y \mp N.\frac{dx}{ds}.$$

Afin d'éliminer la différentielle du tems qui est pris, dans ces équations, pour la variable indépendante, je les ajoute ensemble, après avoir multiplié la première par $\frac{dy}{ds}$ et la seconde par $-\frac{dx}{ds}$, ce qui donne

$$\pm N = \frac{dy}{ds}.\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{ds}.\frac{d^2y}{dt^2} + Y.\frac{dx}{ds} - X.\frac{dy}{ds};$$

mais, d'après les formules connues, on a

$$dx.\frac{d^2y}{dt^2} - dy.\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2}.d.\frac{dy}{dx};$$

d'ailleurs, on a aussi $\frac{dx}{dt} = v.\frac{dx}{ds}$; au moyen de quoi,

la valeur de $\pm N$ devient

$$\pm N = -v^2 . \frac{dx^2}{ds^3} . d . \frac{dy}{dx} + Y . \frac{dx}{ds} - X . \frac{dx}{ds}; \qquad (n)$$

le signe supérieur correspond toujours aux signes supérieurs des valeurs de cos. ε et cos. ε', et l'inférieur, aux signes inférieurs.

Lorsque la vitesse v sera connue en fonction de x et y, et que les forces X et Y seront données, ainsi que l'équation de la trajectoire, on pourra calculer, pour chaque point de cette courbe, la valeur numérique du second membre de cette équation; en désignant cette valeur, positive ou négative, par A, on aura $\pm N = A$; et comme N doit être une quantité positive, il faudra prendre le signe supérieur quand A sera positive, et l'inférieur dans le cas contraire: on aura donc, dans le premier cas, cos. $\varepsilon = + \frac{dy}{ds}$ et cos. $\varepsilon' = - \frac{dx}{ds}$, et dans le second, cos. $\varepsilon = - \frac{dy}{ds}$ et cos. $\varepsilon' = + \frac{dx}{ds}$. Les valeurs et les signes de cos. ε et cos. ε' étant entièrement déterminés, on connaîtra les angles ε et ε', aigus ou obtus, qui répondent à ces cosinus; et d'après ces angles, on construira la droite suivant laquelle la force N est dirigée. Ainsi, l'on voit comment on peut déterminer complètement, par le calcul, la grandeur et la direction de cette force.

258. Il nous reste à vérifier que la force N, déter-

minée de cette manière, se trouvera égale et contraire en chaque point de la trajectoire, à la pression trouvée dans le n° 256. On y parvient assez difficilement, en conservant une direction quelconque aux axes des coordonnées; mais la question devient très-simple, en prenant pour ces axes, la tangente et la normale au point que l'on considère. Je placerai donc l'origine au point m; je prendrai pour axe des y positives, la partie mp' de la normale, qui tombe dans la concavité de la courbe, et pour axe des x positives, la tangente mt'. Alors, j'aurai au point m, $\frac{dy}{ds}=0$ et $\frac{dx}{ds}=1$; par conséquent

$$\cos.\varepsilon=0, \qquad \cos.\varepsilon'=\mp 1;$$

d'où il suit déjà que la direction de la force N coïncide avec la droite mp', ou avec son prolongement mp: avec mp', quand on aura $\cos.\varepsilon'=+1$, et avec mp, quand on aura $\cos.\varepsilon'=-1$. D'ailleurs, γ étant le rayon de courbure en un point quelconque, on a, d'après les formules connues,

$$\frac{1}{\gamma}=\pm\frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx}.\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{-\frac{3}{2}};$$

et comme ce rayon doit être une quantité positive, on prendra le signe $+$ ou le signe $-$, selon que la quantité $\frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx}$ sera positive ou négative; or, en ayant égard à la direction actuelle des axes des coordonnées, il est aisé de voir que la valeur de cette

cette quantité est positive au point m; on prendra donc le signe $+$, et à cause de $\sqrt{dx^2+dy^2}=ds$, on aura

$$\frac{1}{\gamma}=-\frac{dx.d.\frac{dy}{dx}}{ds^3}.$$

Enfin la quantité $R.\cos.\theta$ représente, dans le n° 256, la force qui agit sur le mobile, décomposée suivant la droite mp'; cette droite étant devenue l'axe des y, il s'ensuit donc $R.\cos.\theta=Y$; ainsi, toute réduction faite, l'équation (n) prend cette forme:

$$\pm N=-\frac{v^2}{\gamma}+R.\cos.\theta.$$

La valeur de N sera donc égale, en faisant abstraction du signe, à la quantité $\frac{v^2}{\gamma}-R.\cos.\theta$. De plus, on devra prendre le signe $+$ ou le signe $-$ devant N, selon que cette quantité sera négative ou positive, afin que N soit toujours positive; donc, à cause que les signes supérieurs se correspondent, ainsi que les signes inférieurs, devant N et devant la valeur de $\cos.\epsilon'$, il s'ensuit que la direction de la force N coïncidera avec la droite mp' ou avec la droite mp, selon que cette quantité $\frac{v^2}{\gamma}-R.\cos.\theta$, sera positive ou négative. En rapprochant ce résultat de celui du n° 256, on voit que dans tous les cas la force N sera égale et contraire à la pression.

§. II. *Examen de la force centrifuge dans le cercle.*

259. Huyghens et les premiers géomètres qui ont

donné la mesure de la force centrifuge, l'ont déduite de la considération du mouvement circulaire; comme cette manière d'y parvenir a surtout l'avantage de donner une idée précise de cette force, nous allons la présenter ici en peu de mots.

Représentons-nous donc un point matériel m (fig. 60) attaché à un point fixe C, par un fil inextensible Cm : supposons qu'on lui imprime une vitesse quelconque, dans une direction perpendiculaire à la longueur du fil; et, pour simplifier, supposons aussi qu'aucune force accélératrice n'agisse sur le mobile. Ce point matériel va décrire un cercle AmB, dont le centre et le rayon seront le point fixe et la longueur du fil. Pendant le mouvement, le fil qui retient le mobile, éprouvera, dans le sens de sa longueur, une certaine tension qui n'est autre chose que la force centrifuge. En appliquant au mobile une force égale à cette tension, et constamment dirigée vers le centre fixe, on pourra ensuite faire abstraction du fil, et considérer le mobile comme absolument libre. C'est donc en vertu de cette force centrale inconnue, combinée avec l'impulsion primitive, que le cercle est décrit.

Il s'ensuit d'abord, par le principe des aires (n° 228), que les secteurs circulaires, décrits par le rayon, seront égaux en tems égaux; ce qui exige que les arcs de cercles parcourus par le mobile, soient aussi égaux en tems égaux. Le mouvement circulaire sera donc uniforme, et si l'on appelle v la vitesse imprimée au mobile, on aura $s=vt$; s étant l'arc parcouru dans le tems t.

Soit f l'intensité de la force centrale; quelle que soit cette force, on peut la regarder comme constante en grandeur et en direction, pendant un intervalle de tems infiniment petit; ainsi pendant que le mobile parcourt un arc de cercle infiniment petit, tel que mm', la force f est censée parallèle au rayon Cm qui aboutit à l'origine de cet arc; d'où nous concluons que si la force centrale agissait seule sur le mobile, dans cet intervalle de temps, elle lui ferait parcourir une droite égale à la projection de l'arc mm' sur ce rayon, c'est-à-dire, égale au sinus verse mn de cet arc (n° 216). Or, toute force accélératrice constante a pour mesure la vitesse qu'elle imprime au mobile dans l'unité de tems, laquelle vitesse est égale au double de l'espace qu'elle lui fait parcourir, dans un tems quelconque, divisé par le carré de ce tems; la force f est donc égale au double du sinus verse mn divisé par le carré du tems infiniment petit, employé à décrire l'arc mm'; mais le sinus verse d'un arc infiniment petit est égal au carré de cet arc, divisé par le diamètre, parce qu'on peut alors prendre l'arc à la place de la corde; donc la force centrale sera égale au carré du rapport de l'arc mm' au tems employé à le décrire, divisé par le rayon Cm; et comme ce rapport est la vitesse v, il s'ensuit qu'en appelant r le rayon, on aura

$$f = \frac{v^2}{r}.$$

Cette valeur de f est aussi celle de la force centrifuge, puisque cette force est égale et contraire à la

force centrale. Si la force centrifuge, dans le cercle, est égale au carré de la vitesse, divisé par le rayon; on en conclut immédiatement, que dans une courbe quelconque elle aura pour mesure le carré de la vitesse, divisé par le rayon du cercle osculateur; car on peut toujours supposer que la trajectoire se confond en chaque point dans une étendue infiniment petite, avec son cercle osculateur en ce point; de sorte qu'à chaque instant, et pendant un intervalle de tems infiniment petit, le mobile peut être censé se mouvoir circulairement autour du centre de courbure, et avoir, par conséquent, la force centrifuge qui convient à ce mouvement circulaire.

260. Pour comparer la force centrifuge dans le cercle, à la pesanteur, supposons que la vitesse imprimée au mobile, soit la vitesse due à la hauteur h; de sorte qu'on ait $v^2=2gh$; g étant la gravité (n° 189). Substituant cette valeur dans celle de f, on en conclura

$$\frac{f}{g}=\frac{2h}{r}:$$

la force centrifuge est donc à la pesanteur, comme le double de la hauteur qui correspond à la vitesse du mobile, est au rayon du cercle qu'il décrit.

Si l'on a, dans un cas particulier, $2h=r$, la force centrifuge sera égale à la pesanteur, et le fil attaché au point fixe sera tendu par la force centrifuge qui agit sur tous les points du mobile, comme il le serait par le poids même de ce corps. Cela suppose, cependant, que le mobile est regardé comme un

point matériel, ou mieux, comme un corps dont les dimensions sont très-petites et peuvent être négligées, par rapport à sa distance au point fixe; car, sans cette condition, la force centrifuge ne serait pas la même et égale à la pesanteur, dans toute l'étendue du mobile. Dans cette hypothèse, la valeur de $\frac{f}{g}$ exprimera en général le rapport de la tension que le fil éprouve, au poids du corps qui tourne à son extrémité.

261. Si l'on désigne par T le tems que le mobile emploie à parcourir la circonférence entière du cercle, et par π le rapport de la circonférence au diamètre, on aura

$$v=\frac{2\pi r}{T};$$

substituant cette valeur dans celle de f, il vient

$$f=\frac{4\pi^2 r}{T^2}:$$

la force centrifuge est donc en raison directe du rayon et inverse du carré du tems employé à parcourir la circonférence.

262. Lorsqu'un corps solide tourne autour d'un axe fixe, tous ses points décrivent, dans le même tems, des cercles dont les plans sont perpendiculaires à l'axe, qui ont leurs centres dans cet axe, et pour rayons, les perpendiculaires abaissées de chaque point sur ce même axe; par conséquent les forces centrifuges de ces différens points sont entre elles

comme ces perpendiculaires. Ainsi, par exemple, la force centrifuge des corps placés à la surface de la terre, et qui tournent avec elle autour de son axe de rotation, est proportionnelle aux rayons des *parallèles* qu'ils décrivent ; et de plus cette force est dirigée, en chaque lieu de la terre, suivant le prolongement du rayon du parallèle qui aboutit en ce lieu.

La force qui précipite les corps vers la terre, et que nous appelons *pesanteur*, est due principalement à l'attraction du sphéroïde terrestre sur ces corps; mais quelle qu'en soit la cause, il est toujours certain que la force centrifuge diminue cette tendance des corps pesans; de manière qu'excepté aux pôles où la force centrifuge est nulle, la pesanteur est partout moindre que si la terre n'avait pas de mouvement de rotation. A l'équateur, la force centrifuge et la pesanteur sont dirigées suivant la verticale, en sens contraire l'une de l'autre ; la pesanteur y est donc égale à l'excès de l'attraction de la terre sur la force centrifuge; par conséquent on a, d'après le n° précédent,

$$g = G - \frac{4\pi^2 r}{T^2};$$

g étant la pesanteur, G l'attraction terrestre, ou la pesanteur qui aurait lieu si la terre était immobile, r le rayon de l'équateur, et T le tems de la rotation de la terre.

263. Pour convertir en nombre, la valeur de la force centrifuge, il faut connaître les valeurs de π, r et T. Or, on a $\pi = 3,1415926$; le rayon de l'équa-

teur est de 6376466 mètres; la rotation de la terre s'achève dans un intervalle de tems, un peu plus petit qu'un jour, et dont la longueur exacte est de 0j,99727; pour l'exprimer en secondes, il faut la multiplier par 86400 qui est le nombre de secondes, compris dans un jour; ce qui donne $T=86164$ secondes. Si l'on substitue ces nombres à la place de π, r et T, dans l'expression de la force centrifuge, on trouve, pour résultat, 0,0339. Ce nombre abstrait exprime le rapport de la force centrifuge à l'équateur, à une certaine force prise pour unité.

On doit se rappeler, à cette occasion, que l'expression des forces accélératrices suppose que l'on prend pour unité, la force accélératrice constante qui produirait, dans l'unité de tems, une vitesse égale à l'unité linéaire (n° 198); le nombre 0,0339 exprime donc le rapport de la force centrifuge que nous considérons, à la force accélératrice constante qui produirait, dans une seconde de tems, une vitesse égale à un mètre. Comparée à la même force, l'intensité de la pesanteur à l'équateur est exprimée par le nombre 9,78; car, l'observation a appris qu'en cet endroit de la terre, les corps graves acquièrent une vitesse de 9,78 mètres, pendant la première seconde de leur chute dans le vide; et nous savons que les forces accélératrices constantes sont entre elles comme les vitesses qu'elles produisent en tems égaux. Ainsi, les nombres 0,0339 et 9,78 sont les rapports de la force centrifuge et de la pesanteur, à la même force; donc, en divisant l'un par l'autre, on aura le rapport de ces deux forces entre elles. On trouve de

cette manière, que la pesanteur est égale à environ 288 fois la force centrifuge; d'où il suit que celle-ci n'est qu'environ la 289me partie de la gravité qui aurait lieu sans le mouvement de la terre; c'est-à-dire, que l'on a

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{1}{289} \cdot G.$$

Si le mouvement de rotation de la terre devenait plus rapide, le tems T diminuerait, et la force centrifuge différerait moins de la gravité G. En observant que 289 est le carré de 17, on voit qu'il suffirait que le mouvement de la terre, autour de son axe, devînt 17 fois aussi rapide qu'il l'est réellement, pour que la force centrifuge et la force G fussent égales. Alors la pesanteur serait nulle à l'équateur, et les corps, abandonnés à eux-mêmes, s'y tiendraient en équilibre.

264. La force centrifuge diminue la pesanteur dans tous les points de la surface de la terre, mais d'une quantité plus petite qu'à l'équateur, pour deux raisons : parce que cette force décroît en allant de l'équateur aux pôles, et parce que l'angle qu'elle fait avec la verticale augmente. Si la variation de la pesanteur était uniquement l'effet de la force centrifuge, il serait très-facile d'en déterminer la loi; et, dans ce cas, l'excès de la pesanteur au pôle sur la pesanteur à l'équateur, serait égal, d'après le calcul qu'on vient de faire, à environ un 289me de la pesanteur moyenne. Mais la terre étant un sphéroïde aplati vers les pôles, son attraction sur les corps

placés à sa surface, est aussi une force variable, dont l'intensité décroît en allant du pôle à l'équateur ; la variation de pesanteur que l'on observe, est due à la fois à ce décroissement et à la force centrifuge ; et c'est pour cela que la diminution totale, du pôle à l'équateur, surpasse $\frac{1}{289}$ et s'élève à environ $\frac{1}{176}$ de la pesanteur moyenne (n° 194).

§. III. *Oscillations du Pendule simple.*

265. En général, un *pendule* est un appareil composé d'un corps solide, suspendu à l'extrémité d'un fil qu'on regarde comme inextensible et inflexible ; ce fil est attaché fixement par son autre extrémité à un axe horizontal, assujéti de manière qu'il puisse tourner librement, et que tout autre mouvement soit impossible. Quand la verticale menée par le centre de gravité du corps entier, le fil compris, rencontre l'axe de rotation, le pendule est en équilibre ; si on l'écarte de cette position, et qu'on l'abandonne ensuite à l'action de la pesanteur, il fait, de part et d'autre de la verticale, une suite indéfinie d'oscillations, dont les durées sont égales et servent à la mesure du tems. Mais pour comparer plus facilement entre elles les durées des oscillations de différens pendules, les géomètres ont imaginé un pendule idéal, qu'on appelle le *pendule simple:* il consiste en un point matériel pesant, suspendu à l'extrémité d'un fil dénué de pesanteur, inflexible, inextensible, et attaché par son autre extrémité à un point fixe. Ce sont les oscillations de ce point maté-

riel que nous allons considérer : dans la suite, nous ferons voir comment on détermine, pour chaque pendule composé, la longueur du pendule simple, qui fait ses oscillations dans le même tems que le premier.

266. Avant d'entrer en matière, il convient d'exposer plusieurs propriétés générales du mouvement d'un point matériel pesant, sur une courbe de forme quelconque.

Lorsqu'un corps pesant se meut sur une courbe donnée CBC' (fig. 61), sa vitesse v, en un point quelconque m de sa trajectoire, est déterminée par cette équation (n° 254) :

$$v^2 = A^2 + 2gz,$$

dans laquelle A représente la vitesse du mobile au point de départ que je suppose être le point C; g désigne la pesanteur, et z l'ordonnée verticale du point m, comptée à partir du point C, et dirigée dans le sens de la pesanteur. Si l'on suppose la courbe composée de deux branches BC et BC', qui se joignent au point B, et dont la tangente commune en ce point, est une droite horizontale : l'ordonnée z et la vitesse v augmenteront pendant que le mobile parcourra la branche descendante BC; ces deux quantités atteindront leur *maximum* au point le plus bas; parvenu en ce point, le mobile continuera de se mouvoir au-delà, sur la branche ascendante BC', en vertu de sa vitesse acquise; mais pendant qu'il s'élevera sur cette ligne, l'ordonnée z et la vitesse v diminueront, et cette di-

minution progressive se fera de manière que si l'on mène un plan horizontal quelconque, qui coupe les deux branches de la courbe en m et m', la vitesse du mobile sera la même aux deux points d'intersection.

Il est évident que le mobile doit continuer de s'élever jusqu'à ce que sa vitesse soit devenue égale à zéro; en supposant donc que la vitesse initiale A soit nulle, le mobile remontera jusqu'à ce qu'il se trouve dans le plan horizontal, mené par son point de départ C, et qui coupe la branche ascendante au point C'; arrivé en ce point, il commencera à redescendre sur la branche BC', puis il s'élèvera sur la branche BC, jusqu'à ce qu'il soit revenu à son premier point de départ, avec une vitesse nulle. Le mobile fera ainsi une suite indéfinie d'oscillations semblables sur la courbe donnée. Comme chacun des élémens de cette courbe est décrit avec la même vitesse, soit que le mobile monte, soit qu'il descende, il s'ensuit que le tems de l'ascension, par l'une des deux branches, sera égal au tems de la chute, par la même branche; le mobile emploiera donc le même tems à revenir du point C' au point C, qu'à aller du point C au point C'; par conséquent le tems de la seconde oscillation sera le même que celui de la première, et toutes les oscillations se feront dans des tems égaux.

Quand la vitesse initiale A ne sera pas nulle, le corps, en montant sur la seconde branche de la trajectoire, s'élèvera au-dessus du plan horizontal, mené par son point de départ. Alors, si la trajec-

toire est une courbe fermée, il pourra arriver deux cas : ou la vitesse du mobile sera nulle, avant qu'il ait atteint le point B' où la tangente redevient horizontale, et que j'appellerai le sommet de la courbe donnée ; ou bien il atteindra ce point sans avoir encore perdu toute sa vitesse. Dans le premier cas, le mobile redescendra sur la branche BC', remontera sur la branche BC, et oscillera, comme précédemment, de part et d'autre du point le plus bas B. Les oscillations seront *isochrones* (*) à partir de la seconde, et seulement, la durée de la première sera plus courte que celle des autres. Dans le second cas, le mobile continuera son mouvement au-delà du sommet B' ; il redescendra par la branche $B'CB$, et au lieu d'osciller, il parcourra un nombre indéfini de fois et dans des intervalles de tems égaux, la circonférence entière de la courbe donnée.

Ces propriétés du mouvement d'un corps pesant, sur une courbe donnée, sont indépendantes de la nature de cette courbe, qui peut être plane ou à double courbure : elles supposent seulement que la trajectoire est une courbe continue ; car, si l'angle de deux tangentes consécutives, en un ou plusieurs endroits de la courbe, était un angle fini, il y aurait une perte de vitesse sur chacun de ces points, et le mouvement du corps finirait, à la longue, par s'arrêter, ou du moins par devenir insensible.

267. Le tems que le mobile emploie à faire une

(*) On appelle ainsi les oscillations qui se font en tems égaux.

oscillation entière, ou à décrire la circonférence entière de la trajectoire, dépend de la nature de cette courbe. Pour le déterminer, désignons par s l'arc Cm compris entre le point de départ du mobile et un point quelconque de cette courbe; soit aussi t le tems employé à décrire cet arc; en mettant $\frac{ds}{dt}$, à la place de v, dans l'équation du nº précédent, et résolvant ensuite cette équation, par rapport à dt, il vient

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{A^2 + 2gz}}.$$

Lorsque l'équation de la trajectoire sera donnée, on en tirera z en fonction de s, ou s en fonction de z; substituant donc l'une ou l'autre de ces valeurs dans celle de dt, il ne restera plus qu'à intégrer cette formule pour avoir le tems correspondant à une valeur quelconque de s ou de z. Il sera ensuite aisé d'en conclure le tems de l'oscillation entière, dans le cas du mouvement oscillatoire; ou bien, dans l'autre cas, le tems employé à décrire la circonférence de la courbe donnée.

268. On peut observer que la valeur de t, en fonction de l'arc s, ne dépendra, dans chaque cas particulier, que de la vitesse initiale et de la relation qui sera donnée entre les ordonnées verticales et les arcs de la trajectoire, ces ordonnées et ces arcs étant comptés du point de départ du mobile : cette vitesse et cette relation restant les mêmes, et la trajectoire venant à changer, l'équation entre s et t ne chan-

gera pas, non plus que la loi du mouvement que cette équation exprime. Supposons donc que la courbe donnée soit à double courbure ; de tous ses points abaissons des perpendiculaires sur un plan horizontal, choisi arbitrairement, ce qui formera un cylindre vertical; imaginons ensuite que l'on développe ce cylindre sur un plan vertical, de manière que chaque point de la courbe donnée conserve la même hauteur au-dessus du plan horizontal : cette courbe se trouvera transformée en une courbe plane, dans laquelle la relation des arcs et des ordonnées verticales, comptés d'un point quelconque, sera la même que dans la courbe à double courbure; la loi du mouvement sera donc aussi la même sur les deux courbes, pourvu que la vitesse soit la même sur l'une et sur l'autre, au point de départ du mobile. Réciproquement, le mouvement conservera toutes ses propriétés, si l'on replie la trajectoire plane sur un cylindre vertical quelconque, sans changer les hauteurs des points de cette courbe, au-dessus d'un plan horizontal.

269. Appliquons maintenant ces considérations générales au mouvement du pendule simple, que nous avons défini précédemment.

Soit O le point de suspension, OB la verticale menée par ce point, OC la position initiale du pendule ; supposons que dans cette position on imprime au point matériel attaché à l'extrémité du fil une vitesse perpendiculaire à sa longueur, et dirigée dans le plan vertical COB : il est évident que le

pendule, pendant son mouvement, ne sortira pas de ce plan vertical, et que le point matériel décrira un cercle dont la longueur OC du fil et le point O, seront le rayon et le centre. Désignons ce rayon par a, et par α l'angle initial COB; soit $\alpha-\theta$ l'angle COm, qui répond à l'arc Cm, décrit dans le tems quelconque t; ou, ce qui est la même chose, soit θ l'angle variable mOB, compris entre le pendule et la verticale, lequel angle deviendra négatif, quand le pendule aura dépassé cette ligne; soit enfin h, la hauteur due à la vitesse initiale. En abaissant des points C et m, les perpendiculaires CD et Cp, sur la verticale OB, et conservant les dénominations des nos précédens, nous aurons

$$A^2=2gh, \quad s=Cm=a\alpha-a\theta,$$
$$z=Dp=Op-OD=a.\cos.\theta-a.\cos.\alpha;$$

la valeur de dt deviendra donc

$$dt=-\frac{ad\theta}{\sqrt{2g(h+a.\cos.\theta-a.\cos.\alpha)}},$$

et celle de la vitesse au point m,

$$v=\sqrt{2g(h+a.\cos.\theta-a.\cos.\alpha)}.$$

On peut mettre ces valeurs sous une autre forme, en employant, au lieu de l'angle θ, son sinus verse: en le désignant par x, celui de l'angle α, par $\mathcal{C}$, on aura

$$1-\cos.\alpha=\mathcal{C}, \quad 1-\cos.\theta=x, \quad d\theta=\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}};$$

et par conséquent

$$dt = \frac{-adx}{\sqrt{2x - x^2} \cdot \sqrt{2g(h + a6 - ax)}};$$

$$v = \sqrt{2g(h + a6 - ax)}.$$

Le sinus verse x ne pouvant jamais surpasser le nombre 2, il s'ensuit que si l'on a $h + a6 > 2a$, la vitesse v ne deviendra jamais nulle. Dans ce cas, le pendule, au lieu d'osciller, fera le tour entier de la circonférence. Le point matériel reprendra la même vitesse, toutes les fois qu'il reviendra au même point de cette circonférence, et son mouvement circulaire continuera indéfiniment. Mais si l'on a $h + a6 < 2a$, la vitesse v sera nulle au point de la trajectoire qui répond à $x = \frac{h + a6}{a}$; le pendule oscillera de part et d'autre de la verticale; et il est intéressant de déterminer, dans ce cas, la durée de chaque oscillation. Cette détermination est surtout importante lorsqu'on suppose très-petite l'amplitude des oscillations, ce qui a effectivement lieu dans tous les usages que l'on fait du pendule; nous commencerons donc par résoudre la question dans cette hypothèse.

270. Il est permis de supposer la vitesse initiale, égale à zéro; car cela revient à prendre pour origine du mouvement, le commencement d'une oscillation. Nous aurons alors $h = 0$. De plus, les écarts du pendule, de part et d'autre de la verticale, étant supposés très-petits, il s'ensuit que les angles α et θ, sont aussi très-petits; en négligeant donc leurs quatrièmes

trièmes puissances, on aura

$$\cos.\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \quad \cos.\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

Ces valeurs substituées dans celle de dt, il vient

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}.\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$t = C + \sqrt{\frac{a}{g}}.\text{arc.}\left(\cos. = \frac{\theta}{\alpha}\right);$$

C étant la constante arbitraire. A l'origine du mouvement, on a à la fois $t=0$, $\theta=\alpha$, ce qui donne $C=0$; supprimant donc cette constante, et résolvant l'équation par rapport à θ, on trouve

$$\theta = \alpha.\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Cette valeur de θ renferme la loi du mouvement du pendule. On voit qu'à mesure que t augmente, θ diminue, et le pendule se rapproche de la verticale; il coïncide avec cette ligne, et l'angle θ est nul, quand $t\sqrt{\frac{g}{a}}$ est devenu égal à $\frac{\pi}{2}$, π étant la demi-circonférence pour le rayon égal à l'unité. Si t continue d'augmenter, θ devient négatif, et le pendule passe de l'autre côté de la verticale; il s'en éloigne jusqu'à ce que $t\sqrt{\frac{g}{a}}$ soit devenu égal à π : à cet instant, on a $\theta = -\alpha$; c'est le plus grand écart du pen-

dule ; car si t augmente encore, la valeur négative de θ diminue, et le pendule se rapproche de la verticale. En continuant cet examen, on reconnaîtra sans peine que le pendule s'écarte successivement d'un angle α, de part et d'autre de la verticale; si l'on désigne par T le tems d'une oscillation entière, pendant lequel tems, le pendule décrit deux de ces angles α, on aura

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

En général, si l'on considère le pendule dans une position quelconque, d'un côté de la verticale, il se retrouvera dans la même position, de l'autre côté de cette ligne, après un intervalle de tems égal à T ; de sorte que l'angle θ n'aura fait que changer de signe. En effet, soit θ', ce que devient θ, quand t devient $t+T$, nous aurons

$$\theta' = \alpha.\cos.(t+T)\sqrt{\frac{g}{a}} = \alpha.\cos.\left(t\sqrt{\frac{g}{a}} \;+\right) = -\theta.$$

271. La vitesse du corps oscillant est égale à $\frac{ds}{dt}$, ou à $-a.\frac{d\theta}{dt}$, à un instant quelconque ; différentiant donc la valeur de θ, on trouve

$$v = \alpha \sqrt{ag}.\sin.t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Cette vitesse est nulle toutes les fois que $t\sqrt{\frac{g}{a}}$ est un multiple de π, ce qui a lieu dans les positions ex-

trêmes du pendule; elle est au contraire à son *maximum*, quand $t\sqrt{\frac{g}{a}}$ est un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, et alors le pendule coïncide avec la verticale. Dans ce dernier cas, on a $v=\alpha\sqrt{ag}$, ou, ce qui est la même chose, $v=\sqrt{2gb}$, en faisant $b=\frac{a\alpha^2}{2}$; mais la hauteur du point de départ du mobile, au-dessus du point le plus bas de sa trajectoire, est égale à $a(1-\cos.\alpha)$; elle se réduit à $\frac{a\alpha^2}{2}$, ou à b, à cause que nous négligeons la quatrième puissance de α; donc la vitesse au point le plus bas, est la vitesse due à cette hauteur; ce qui résulte, en effet, du théorème général du n° 254.

272. La valeur de T nous montre que la durée des petites oscillations d'un pendule est indépendante de leur amplitude; elle ne dépend que de la longueur du fil et de l'intensité de la pesanteur. De ces trois quantités a, g et T, deux étant données par l'observation, on en conclura immédiatement la troisième : par exemple, si l'on donne a et T, on aura

$$g=\frac{a\pi^2}{T^2}.$$

C'est au moyen de cette formule que l'on détermine, en chaque lieu de la terre, l'intensité de la pesanteur, d'après l'observation du pendule. Pour cela, on fait osciller un pendule composé, de forme connue, pendant un tems donné; on compte le nombre d'oscillations isochrones qu'il fait dans cet

intervalle de tems; et, en divisant le tems donné, par ce nombre, on a la durée de chaque oscillation; par la règle que nous enseignerons dans la suite, on calcule la longueur du pendule simple, qui ferait ses oscillations dans le même tems que le pendule composé; de cette manière, on a les valeurs de a et de T, et l'on en conclut celle de g, en les substituant dans l'équation précédente. En faisant osciller des corps de différentes masses et de différentes matières, et en déterminant pour chacun d'eux, par le moyen que nous indiquons, l'intensité de la pesanteur, on a reconnu que cette force accélératrice est la même pour tous ces corps, dans un même lieu de la terre.

On a trouvé, à l'Observatoire de Paris, $0^m,99384$ pour la longueur du pendule simple qui fait ses petites oscillations dans une seconde de tems; en prenant donc la seconde pour unité de tems, on aura $a=0^m,99384$, et $T=1$; d'ailleurs on a $\pi=3,14159$; d'où l'on conclut $g=9^m,8088$.

Cette valeur de g est la vitesse que la pesanteur imprime aux corps, à notre latitude, pendant la première seconde de leur chute dans le vide; elle exprime aussi le double de l'espace que ces corps parcourent dans le même tems (n° 187).

L'observation a appris que la longueur du pendule à secondes varie à la surface de la terre, et qu'elle diminue à mesure qu'on se rapproche de l'équateur; or, le tems de l'oscillation restant le même, la formule précédente montre que la pesanteur est proportionnelle à cette longueur: on doit donc en con-

clure que l'intensité de cette force est également variable; et, vu l'extrême précision dont les observations du pendule sont susceptibles, elles offrent le moyen le plus propre à déterminer la loi de cette variation. C'est en effet par ce moyen qu'on a trouvé l'expression de la pesanteur à une latitude quelconque, que nous avons donnée dans le n° 194.

273. La résistance de l'air n'a aucune influence sensible sur la durée des petites oscillations du pendule : elle augmente le tems de la demi-oscillation descendante; mais elle diminue, d'une quantité égale, celui de la demi-oscillation ascendante; et le tems de l'oscillation entière reste le même que dans le vide.

Pour le prouver, considérons le mouvement du pendule dans un milieu résistant, et conservons toutes les denominations du n° 269. Menons par le point m, une tangente mT au cercle décrit, ou une perpendiculaire au rayon Om, et une verticale mK; l'angle KmT sera complément de l'angle mOB ou θ; par conséquent la pesanteur, décomposée suivant mT, sera exprimée par $g.sin.\theta$. La résistance du milieu s'exerce suivant cette même tangente, en sens contraire du mouvement; si donc on la suppose proportionnelle au carré de la vitesse, comme dans la théorie des projectiles, et si on la représente par $m.\frac{ds^2}{dt^2}$, m étant un coefficient donné, la force accélératrice totale qui agit sur le mobile, sera égale à $g.sin.\theta - m.\frac{ds^2}{dt^2}$, pendant toute la durée de l'oscilla-

tion entière. Mais, en général, la force accélératrice décomposée suivant la tangente à la trajectoire, est exprimée par $\frac{d^2s}{dt^2}$ (n° 251); nous aurons donc, pour l'équation du mouvement,

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g.\sin.\theta-m.\frac{ds^2}{dt^2};$$

ou bien, en mettant à la place de s, sa valeur $a\alpha-a\theta$,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{a}.\sin.\theta+am.\frac{d\theta^2}{dt^2}. \qquad (1)$$

Cette équation a une intégrale première sous forme finie, que l'on obtient de cette manière. Je multiplie par $2d\theta$, et j'intègre ensuite tous les termes, ce qui donne

$$\frac{d\theta^2}{dt^2}=\frac{2g}{a}.\cos.\theta+2am.\int\frac{d\theta^2}{dt^2}.d\theta;$$

je fais, pour un moment, $\int\frac{d\theta^2}{dt^2}.d\theta=x$; j'ai alors $\frac{d\theta^2}{dt^2}=\frac{dx}{d\theta}$; et l'équation précédente devient

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{2g}{a}.\cos.\theta+2am.x.$$

En intégrant cette équation linéaire et du premier ordre, par la méthode connue, on trouve

$$x=C.e^{2am\theta}+\frac{2g.\sin.\theta}{a(1+4a^2m^2)}-\frac{4gm.\cos.\theta}{1+4a^2m^2};$$

C étant la constante arbitraire, et e la base des logarithmes dont le module est l'unité. Je différentie, je

divise par $d\theta$, et je remets $\frac{d\theta^2}{dt^2}$ à la place de $\frac{dx}{d\theta}$; il vient

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = 2amC.e^{2am\theta} + \frac{2g.\cos.\theta}{a(1+4a^2m^2)} + \frac{4gm.\sin.\theta}{1+4a^2m^2}.$$

Si l'on l'on résout cette intégrale première de l'équation (1), par rapport à dt, on en tirera une valeur de cette forme: $dt = F\theta.d\theta$; la question sera donc ramenée à intégrer la formule $F\theta.d\theta$; mais cette intégration est impossible sous forme finie, par les moyens connus; et il sera plus facile d'intégrer par approximation, l'équation (1) elle-même.

274. Pour cela, j'observe que la valeur de θ, quand elle sera connue, se trouvera être une fonction de α; cet angle étant supposé très-petit, si l'on développe cette valeur suivant les puissances de α, on aura une série très-convergente; de plus, cette série ne renfermera pas de termes indépendans de α, si l'on suppose, comme précédemment, la vitesse initiale du mobile égale à zéro; car, dans cette hypothèse, il est évident que l'angle θ doit être nul, en même tems que α : je fais donc

$$\theta = \alpha\theta_1 + \alpha^2\theta_2 + \alpha^3\theta_3 + \text{etc.};$$

θ_1, θ_2, θ_3, etc., étant des fonctions inconnues de la variable t. En substituant cette valeur dans l'équation (1), développant tous ses termes suivant les puissances de α, et égalant ensuite les coefficiens des mêmes puissances dans les deux membres, on aura une suite d'équations différentielles secondes qui

serviront à déterminer θ_1, θ_2, θ_3, etc. De cette manière, on calculera autant de termes qu'on voudra, de la valeur de θ ; mais dans la question présente, on peut borner l'approximation au carré de α, et négliger le cube et les puissances supérieures de cette quantité.

Alors, on a simplement

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\alpha.\frac{d^2\theta_1}{dt^2}+\alpha^2.\frac{d^2\theta_2}{dt^2}, \quad \sin.\theta=\alpha\theta_1+\alpha^2\theta_2, \quad \frac{d\theta^2}{dt^2}=\alpha^2.\frac{d\theta_1^2}{dt^2};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (1), et égalant entre eux, les coefficiens de α et de α^2 dans les deux membres, il vient

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2}=-\frac{g}{a}.\theta_1, \quad \frac{d^2\theta_2}{dt^2}=-\frac{g}{a}.\theta_2+am.\frac{d\theta_1^2}{dt^2}.$$

La première de ces deux équations donne, en l'intégrant,

$$\theta_1=h.\cos.\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+h'\right);$$

h et h' étant les deux constantes arbitraires. Si l'on compte le tems t, de l'origine du mouvement, on aura, à cet instant, $t=0$, $\theta=\alpha$, $\frac{d\theta}{dt}=0$; par conséquent, on doit avoir, à la fois, $t=0$, $\theta_1=1$, $\frac{d\theta_1}{dt}=0$; ce qui donne $h=1$, $h'=0$; donc

$$\theta_1=\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}} \quad \text{et} \quad \frac{d\theta_1}{dt}=-\sqrt{\frac{g}{a}}.\sin.t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

En mettant cette dernière valeur dans la seconde

de nos deux équations, et observant qu'en général $\sin^2.=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\cos.2$, on aura

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2}=-\frac{g}{a}.\theta_2+\frac{mg}{2}-\frac{mg}{2}.\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Il est aisé de voir qu'on satisfait à cette équation, en prenant

$$\theta_2=k.\cos.\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k'\right)+\frac{am}{2}+\frac{am}{6}.\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}};$$

k et k' étant deux constantes qui restent arbitraires; et à cause de ces constantes, cette valeur de θ_2 est l'intégrale complète de l'équation précédente. A l'origine du mouvement, on doit avoir, à la fois, $t=0$, $\theta_2=0$, $\frac{d\theta_2}{dt}=0$; d'où l'on conclut, sans difficulté, $k'=0$, $k=-\frac{2am}{3}$; et par conséquent

$$\theta_2=-\frac{2am}{3}.\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}+\frac{am}{2}+\frac{am}{6}.\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Au moyen de ces valeurs de θ_1 et de θ_2, celle de θ devient

$$\theta=\left(\alpha-\frac{2\alpha^2am}{3}\right).\cos.t\sqrt{\frac{g}{a}}+\frac{\alpha^2am}{2}+\frac{\alpha^2am}{6}.\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

La vitesse v du mobile, à un instant quelconque, est égale à $-a.\frac{d\theta}{dt}$; on aura donc

$$v=\left(\alpha-\frac{2\alpha^2am}{2}\right).\sqrt{ag}.\sin.t\sqrt{\frac{g}{a}}+\frac{\alpha^2am.\sqrt{ag}}{3}.\sin.2t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Il ne s'agit plus maintenant que d'examiner ces valeurs de θ et de v, qui renferment la loi du mouvement du pendule.

275. La valeur de v est nulle, comme on l'a supposé, quand $t=0$; elle augmente avec le tems, jusqu'à ce qu'elle ait atteint son *maximum*, puis elle diminue, et c'est quand elle est redevenue nulle, que l'oscillation entière est achevée. Or, en faisant attention que le coefficient de $\sin.2t\sqrt{\frac{g}{a}}$ est très-petit par rapport à celui de $\sin.t\sqrt{\frac{g}{a}}$, il est aisé de voir que la somme des deux termes qui composent la valeur de v, ne deviendra pas nulle, avant que l'arc $t\sqrt{\frac{g}{a}}$ ne soit devenu égal à la demi-circonférence; en la désignant donc par π, et la durée de l'oscillation entière par T, on aura, comme dans le vide,

$$T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Mais si l'on voulait connaître le tems de la demi-oscillation descendante, on aurait, pour la déterminer, la condition $\theta=0$; ou bien, en représentant ce tems par T', on aurait l'équation

$$\left(1-\frac{2\alpha am}{3}\right).\cos.T'\sqrt{\frac{g}{a}}+\frac{\alpha am}{2}+\frac{\alpha am}{6}.\cos.2T'\sqrt{\frac{g}{a}}=0.$$

Si α était tout-à-fait nul, cette équation donnerait $T'\sqrt{\frac{g}{a}}=\frac{\pi}{2}$; en faisant donc $T'\sqrt{\frac{g}{a}}=\frac{\pi}{2}+x$, l'incon-

nue x sera une très-petite quantité; et en négligeant son carré et son produit par α, l'équation précédente deviendra

$$-x+\frac{\alpha am}{2}-\frac{\alpha am}{6}=0;$$

d'où l'on tire $x=\frac{\alpha am}{3}$; donc

$$T'=\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{a}{g}}+\frac{\alpha am}{3}\cdot\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Le tems de cette demi-oscillation n'est donc plus la moitié du tems de l'oscillation entière: il est augmenté, par la résistance du milieu, de la quantité $\frac{\alpha am}{3}\cdot\sqrt{\frac{a}{g}}$, par conséquent le tems de la demi-oscillation ascendante est diminué de la même quantité, puisque celui de l'oscillation entière n'est pas changé.

276. Quant à l'amplitude de l'oscillation, elle est diminuée par la résistance du milieu : le pendule, après avoir décrit l'angle α, en descendant, décrit un angle plus petit en remontant de l'autre côté de la verticale; car si l'on substitue, dans la valeur de θ, celle de T à la place de t, on a

$$\theta=-\alpha+\frac{2\alpha^2 am}{3}+\frac{\alpha^2 am}{2}+\frac{\alpha^2 am}{6}=-\alpha+\frac{4\alpha^2 am}{3};$$

où l'on voit que l'amplitude de la seconde demi-oscillation est plus petite que celle de la première, de la quantité $\frac{4\alpha^2 am}{3}$.

A la fin de l'oscillation entière, le pendule se re-

trouve dans le même cas qu'au commencement; il revient vers la verticale, puis il la dépasse, et il parcourt en remontant, un angle un peu plus petit qu'en descendant. Les oscillations continuent de même, en diminuant toujours, jusqu'à ce qu'elles soient devenues absolument insensibles; mais tant qu'elles subsistent, les oscillations entières se font dans le même tems; car la durée de la première, que nous venons de calculer, étant indépendante de son amplitude, elle convient également à toutes les autres.

277. Quoiqu'on ait soin, dans les différens usages du pendule, de faire ensorte que les oscillations soient très-petites, il est cependant bon de connaître leur durée, dans le cas où elles ont une étendue quelconque. Je reprends donc la seconde valeur de dt, donnée dans le n° 269; j'y fais $h=0$, et je l'écris ensuite sous cette forme :

$$dt=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}\cdot\sqrt{1-\frac{x}{2}}}:$$

L'intégrale de cette formule n'est pas connue sous forme finie; pour l'obtenir en série, je développe le facteur $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$, suivant les puissances de x; j'ai de cette manière, la série

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^2}{4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^3}{8}+\text{etc.},$$

dont le terme général est

$$\frac{1.3.5.7.....2n-1}{2.4.6.8.....2n}.\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

On aura donc

$$dt=-\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}}.\left(1+\frac{1}{2}.\frac{x}{2}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{x^2}{4}+\text{etc.}\right).$$

Les intégrales des différens termes de cette expression, sont toutes comprises sous cette forme:

$$A.\int\frac{-x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}};$$

n étant un nombre entier et positif, ou zéro, et A un certain coefficient qui varie avec n. Or, si l'on veut avoir le tems de la demi-oscillation descendante, il est évident qu'on doit prendre ces intégrales, depuis $x=6$, qui répond au point de départ du mobile, jusqu'à $x=0$, qui répond au point le plus bas de sa trajectoire. Soit donc, en général, B_n, la valeur de l'intégrale $\int\frac{-x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}}$, prise entre ces limites; l'indice n répondant à l'exposant n, de sorte que B_0, B_1, B_2, etc., soient les valeurs des intégrales $\int\frac{-dx}{\sqrt{6x-x^2}}$, $\int\frac{-xdx}{\sqrt{6x-x^2}}$, $\int\frac{-x^2dx}{\sqrt{6x-x^2}}$, etc., prises entre les mêmes limites; soit aussi T le tems de l'oscillation entière, qui est double du tems de la demi-oscillation; nous aurons

$$T=\sqrt{\frac{a}{g}}.\left(B_0+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.B_1+\frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{4}.B_2+\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{8}.B_3+\text{etc.}\right);$$

série dont le terme général est

$$\sqrt{\frac{a}{g}}.\left(\frac{1.3.5.7.\ldots.2n-1}{2.4.6.8.\ldots.2n}\right).\left(\frac{1}{2}\right)^2.B_n.$$

Les valeurs des intégrales définies B_0, B_1, B_2, etc., sont liées entre elles de manière que l'une d'elles étant connue, il est facile d'en déduire successivement toutes les autres. En effet, on a identiquement

$$\int \frac{-x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \int \frac{(\frac{1}{2}6-x).x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}} + \frac{6}{2}.\int \frac{-x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}},$$

$$\int \frac{(\frac{1}{2}6-x).x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}} = x^{n-1}.\sqrt{6x-x^2} - (n-1).\int x^{n-2}dx.\sqrt{6x-x^2},$$

$$\int x^{n-2}dx.\sqrt{6x-x^2} = 6.\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}} - \int \frac{x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}};$$

d'où l'on conclut

$$\int \frac{-x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}} = x^{n-1}.\sqrt{6x-x^2} + (n-1).\int \frac{x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}} + \frac{6(2n-1)}{2}.\int \frac{-x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}};$$

et, par conséquent,

$$\int \frac{-x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \frac{x^{n-1}.\sqrt{6x-x^2}}{n} + \frac{6(2n-1)}{2n}.\int \frac{-x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}}.$$

Aux deux limites $x=0$, $x=6$, on a $\sqrt{6x-x^2}=0$; en passant aux intégrales définies, la dernière équation devient donc

$$B_n = \frac{6(2n-1)}{2n}.B_{n-1}.$$

En faisant successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc., dans cette équation, on en tire

$$B_1=\frac{1}{2}.\mathcal{C}B_0,$$
$$B_2=\frac{3}{4}.\mathcal{C}B_1=\frac{1.3}{2.4}.\mathcal{C}^2B_0,$$
$$B_3=\frac{5}{6}.\mathcal{C}B_2=\frac{1.3.5}{2.4.6}.\mathcal{C}^3B_0,$$
$$B_4=\frac{7}{8}.\mathcal{C}B_3=\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\mathcal{C}^4B_0;$$

et généralement

$$B_n=\frac{1.3.5.7\ldots\ldots 2n-1}{2.4.6.8\ldots\ldots 2n}.\mathcal{C}^nB_0.$$

Quant à la valeur de B_0, on a

$$\int\frac{-dx}{\sqrt{\mathcal{C}x-x^2}}=\text{arc.}\left(\cos.=\frac{2x-\mathcal{C}}{\mathcal{C}}\right)+\text{constante};$$

prise depuis $x=\mathcal{C}$ jusqu'à $x=0$, cette intégrale donne $B_0=\pi$; π représentant le rapport de la circonférence au diamètre.

Si l'on substitue maintenant la valeur de B_n, dans le terme général du développement de T, ce terme devient

$$\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.\left(\frac{1.3.5.7\ldots\ldots 2n-1}{2.4.6.8\ldots\ldots 2n}\right)^2.\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right)^n.$$

La valeur de T devient aussi

$$T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{\mathcal{C}}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2.\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right)^3+\text{etc.}\right].$$

Cette série, qui procède suivant les puissances de $\frac{\epsilon}{2}$, est essentiellement convergente, puisque ϵ est toujours plus petit que 2.

278. Dans les petites oscillations, où l'on suppose ϵ très-petit, on a, en ne conservant que le premier terme de la série,

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Ce résultat est le même que nous avions déjà trouvé (n° 270); mais la valeur exacte de T nous montre, de plus, que la durée des oscillations n'est pas rigoureusement indépendante de l'arc parcouru par le pendule. Dans les observations qui exigent une grande précision, on conserve les deux premiers termes de la valeur T; on a alors

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right);$$

car $\epsilon = \frac{\alpha^2}{2}$, à très-peu près, α étant l'arc dont ϵ est le sinus verse (n° 269). Le second terme de cette valeur de T est la correction due à la grandeur de l'arc parcouru. Cette correction varie avec l'arc, quand le pendule oscille dans l'air; et c'est en cela que la résistance du milieu peut avoir une petite influence sur la durée des oscillations.

279. Si l'on écartait le pendule infiniment peu de la verticale, il emploierait, pour y revenir, un tems fini

fini et égal à $\frac{\pi}{2}.\sqrt{\frac{a}{g}}$. Dans ce mouvement, le mobile décrit un espace infiniment petit dans un tems fini; ce qui vient de ce que l'intensité de la force accélératrice qui le sollicite, est infiniment petite. En effet, cette force est la pesanteur décomposée suivant la tangente à la trajectoire; or, dans l'étendue de l'arc infiniment petit qui aboutit au point le plus bas de cette courbe, la tangente fait, avec la verticale, un angle qui diffère d'un droit, d'une quantité infiniment petite; le cosinus de cet angle, par lequel il faut multiplier la pesanteur pour avoir sa composante, est donc infiniment petit; donc l'intensité de cette composante est aussi infiniment petite.

Généralement, lorsqu'un point matériel pesant est astreint à rester sur une courbe donnée, de forme quelconque, il peut demeurer en équilibre dans tous les points de cette courbe où la tangente est horizontale; si on le place infiniment près de l'un de ces points, sa pesanteur se décomposera en deux forces, l'une perpendiculaire à la courbe, et qui sera détruite, l'autre dirigée suivant la tangente: cette seconde force sera infiniment petite, et il est aisé de voir, d'après le sens de sa direction, qu'elle tendra à ramener le corps vers la position d'équilibre, ou à l'en écarter, selon qu'on l'aura élevé ou abaissé, par rapport à cette position. Dans le premier cas, l'équilibre sera stable; le mobile oscillera indéfiniment de part et d'autre du point le plus bas de sa trajectoire; l'amplitude de ses oscillations sera infiniment petite; et pour déterminer leur

durée, j'observe que dans l'étendue de l'arc que chaque oscillation comprend, la trajectoire peut être censée se confondre avec le cercle osculateur au point le plus bas; d'où je conclus que le tems de chaque oscillation entière devra être égal à $\pi.\sqrt{\frac{a}{g}}$, a étant le rayon de ce cercle.

§. IV. *Mouvement d'un point matériel pesant, sur la cycloïde.*

280. Nous avons fait connaître précédemment les propriétés générales du mouvement d'un corps pesant sur une courbe donnée; il s'agit maintenant de considérer, en particulier, le cas où la trajectoire est une cycloïde. Le mouvement, sur cette courbe, présente des propriétés singulières, qui ont beaucoup occupé les géomètres du siècle dernier, et qui méritent d'être connues.

Considérons une cycloïde ACB (fig. 62), dont l'axe AB est horizontal, et qui est placée au-dessous de cet axe; le point C est le point le plus bas de cette courbe; la perpendiculaire CD, abaissée de ce point sur l'axe AB, est le diamètre du cercle générateur; la longueur de la demi-cycloïde AC, ou CB est égale au double de ce diamètre; et généralement, si l'on représente par a cette longueur, par x l'abscisse Cp d'un point quelconque m, comptée sur l'axe CD, à partir du point C, et par s l'arc Cm, on aura, d'après les propriétés connues de la cycloïde,

$$s^2 = 2ax.$$

Un point matériel assujéti à rester sur cette courbe, ne pourra demeurer en équilibre qu'au point C: si on le place en un point quelconque k, il descendra vers le point C; puis il remontera sur l'autre branche de la courbe, et il oscillera indéfiniment de part et d'autre du point C. Les deux branches de la courbe étant symétriques, les durées des deux demi-oscillations seront égales, et celle de l'oscillation entière sera double du tems que le mobile emploie à tomber du point k au point C. Pour déterminer ce tems, reprenons la valeur de dt, donnée dans le n° 267; en y faisant, pour simplifier, $A=0$, et observant que l'arc s, compté du point C, diminue quand t augmente, nous aurons

$$dt=-\frac{ds}{\sqrt{2gz}}.$$

La variable z est ici l'ordonnée verticale du mobile, comptée de son point de départ; on aura donc $z=h-x$, h étant la hauteur CH, du point k au-dessus du point C; d'ailleurs l'équation $s^2=2ax$ donne $sds=adx$; par conséquent,

$$dt=-\frac{sds}{\sqrt{2gzs^2}}=-\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{a}{g}}.\frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}.$$

En intégrant, il vient

$$t=\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{a}{g}}.\text{arc.}\left(\cos.=\frac{2x-h}{h}\right);$$

je n'ajoute pas de constante arbitraire, parce que

je compte le tems t à partir du départ du mobile ; ce qui exige qu'on ait à-la-fois $x=h$ et $t=0$.

Soit maintenant $t_{\prime}$ le tems qui s'est écoulé quand le mobile est parvenu au point C : en ce point, on a $x=0$; donc

$$t_{\prime}=\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{a}{g}}.\text{arc.}(\cos.=-1)=\frac{\pi}{2}.\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

On voit que le tems de la chute du mobile, par l'arc de la cycloïde, est indépendant de la hauteur h, dont le corps est tombé ; de manière que deux corps qui se meuvent sur une même cycloïde, et qui partent de deux points différens k et k', parviendront dans le même tems au point le plus bas.

281. En combinant cette propriété de la cycloïde, avec une autre propriété connue de la même courbe, on pourrait former un pendule dont les oscillations seraient rigoureusement d'égale durée, quelle que fût leur amplitude. En effet on sait que la développée de la cycloïde est une autre cycloïde, égale et placée dans une position inverse ; de sorte que si l'on prolonge CD d'une quantité DO égale à CD, et qu'on trace deux demi-cycloïdes OA et OB, tangentes aux droites OD et AB, et égales aux demi-cycloïdes AC et BC, la courbe OA sera la développée de AC, et la courbe OB sera celle de BC. Concevons donc que les courbes OA et OB sont formées par des verges flexibles, auxquelles on a donné cette figure ; supposons qu'on attache au point fixe O, un fil

OC, égal en longueur à OA ou à OB, et qu'on suspende un corps pesant à son extrémité C; si l'on écarte ce pendule, de la position verticale, et qu'on l'abandonne ensuite à l'action de la pesanteur, il oscillera de part et d'autre de cette position, et il est évident que, pendant ces oscillations, le fil OC s'enveloppera alternativement sur la courbe OA et sur la courbe OB; son extrémité décrira donc la courbe ACB, qui est leur développante; par conséquent on peut être certain que le mobile attaché à cette extrémité, décrira des arcs de cycloïde, de part et d'autre du point le plus bas; donc, d'après le résultat précédent, les oscillations de ce pendule s'achèveront toujours dans le même tems, quel que soit l'écartement primitif. Si le mobile avait à l'origine du mouvement, une vitesse quelconque dirigée dans le plan de la courbe ACB, le tems de l'oscillation n'en serait pas changé, puisque cela reviendrait évidemment à supposer que le mobile part d'un point plus élevé de cette courbe, avec une vitesse nulle.

282. Le tems de la chute par l'arc Ck, étant indépendant de la longueur de cet arc, il ne doit pas changer, si l'on prend le point k infiniment près du point C; mais alors ce tems est le même que si le mouvement avait lieu sur le cercle osculateur de la cycloïde au point C (n° 279); la valeur de t, doit donc être égale au tems de la demi-oscillation infiniment petite d'un pendule qui aurait le rayon de ce cercle pour longueur; or,

c'est ce qui arrive en effet ; car la longueur de la demi-cycloïde *AC*, que nous avons désignée par a, est égale au rayon de courbure qui répond au sommet de cette courbe, et d'après le n° 270, le tems de la demi-oscillation d'un pendule de cette longueur, est exprimé par $\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{a}{g}}$.

283. On appelle *tautochrone*, toute courbe sur laquelle un corps pesant parvient toujours au point le plus bas, quel que soit le point de cette courbe d'où il est parti. Ainsi, dans le vide, la cycloïde est une courbe tautochrone; mais est-elle la seule courbe de cette espèce? C'est ce qu'on va voir par l'analyse suivante.

Nous avons, en conservant les dénominations du n° 280,

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}}\cdot\frac{ds}{\sqrt{h-x}}.$$

Quelle que soit la courbe tautochrone, s est une fonction de x, et l'on peut imaginer cette fonction développée suivant les puissances ascendantes de la variable ; soit donc

$$s = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \text{etc.};$$

A, B, C, etc., α, β, γ, etc., étant des coefficiens et des exposans indéterminés. Comme l'abscisse x et l'arc s sont comptés d'un même point de la courbe, savoir, à partir du point le plus bas, on doit avoir en même tems $x = 0$ et $s = 0$; il est donc nécessaire que tous les exposans α, β, γ, etc. soient positifs, et qu'aucun d'eux ne soit zéro. Si l'on prend

la valeur de ds, et qu'on la substitue dans celle de dt, il vient

$$dt = -\frac{A\alpha}{\sqrt{2g}}.\frac{x^{\alpha-1}dx}{\sqrt{h-x}} - \frac{B\zeta}{\sqrt{2g}}.\frac{x^{\zeta-1}dx}{\sqrt{h-x}} - \frac{C\gamma}{\sqrt{2g}}.\frac{x^{\gamma-1}dx}{\sqrt{h-x}} - \text{etc.}$$

Or, pour avoir le tems $t_,$, que le mobile emploie à descendre de la hauteur h, il faut prendre les intégrales de tous ces termes, depuis $x=h$ jusqu'à $x=0$; ou bien, si l'on fait d'abord $x=hx'$, il faudra prendre ces intégrales, depuis $x'=1$ jusqu'à $x'=0$. D'après cela, il est aisé de voir que l'on aura

$$t_, = \frac{\alpha A A_,}{\sqrt{2g}}.h^{\alpha-\frac{1}{2}} + \frac{\zeta B B_,}{\sqrt{2g}}.h^{\zeta-\frac{1}{2}} + \frac{\gamma C C_,}{\sqrt{2g}}.h^{\gamma-\frac{1}{2}} + \text{etc.};$$

en faisant pour abréger

$$A_, = -\int\frac{x'^{\alpha-1}dx'}{\sqrt{1-x'}},$$

$$B_, = -\int\frac{x'^{\zeta-1}dx'}{\sqrt{1-x'}},$$

$$C_, = -\int\frac{x'^{\gamma-1}dx'}{\sqrt{1-x'}}, \text{ etc.};$$

et en donnant pour limites à ces intégrales, $x'=1$ et $x'=0$. Il est important de remarquer qu'aucune de ces quantités $A_,$, $B_,$, $C_,$, etc., ne peut être nulle; car $B_,$, par exemple, est la somme des valeurs de $\frac{-x'^{\zeta-1}}{\sqrt{1-x'}}$, comprises entre les limites $x'=1$ et $x'=0$, et multipliées par dx'; or, cette fonction de x' ne changeant pas de signe, dans cet intervalle, il est im-

possible que la somme de ses valeurs soit égale à zéro.

Maintenant il est évident que la valeur de $t_,$ ne peut être indépendante de h, à moins que tous les termes de cette valeur ne soient nuls, excepté celui dans lequel l'exposant de h est zéro. Supposons donc que ce terme soit le premier, c'est-à-dire, supposons qu'on ait $\alpha=\frac{1}{2}$; pour que le second terme disparaisse, il faut que le produit $6BB_,$ soit nul; ce qui exige qu'on ait $B=0$, puisque ni 6 ni $B_,$ ne peuvent être zéro. On verra de même que les coefficiens C, D, etc., sont aussi nécessairement nuls : la valeur de s, dans la courbe tautochrone, se réduit donc à

$$s=Ax^{\frac{1}{2}};$$

d'où l'on tire $s^2=A^2x$, équation qui appartient à une cycloïde à base horizontale, dont le sommet est au point que le mobile atteint toujours dans le même tems. Cette courbe est donc la seule tautochrone dans le vide.

En désignant par a, la longueur de la demi-cycloïde, on aura $A^2=2a$, et la valeur de $t_,$ deviendra

$$t_,=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot A_,;$$

de plus à cause de $\alpha=\frac{1}{2}$, on a

$$A_,=-\int\frac{dx'}{\sqrt{x'-x'^2}}=\text{arc.}(\cos.=2x'-1)=\pi,$$

puisque cette intégrale doit être prise depuis $x'=0$, jusqu'à $x'=1$: on a donc $t_,=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$, comme dans le n° 280.

284. D'après la remarque générale que l'on a faite précédemment (n° 268), si l'on replie la cycloïde *ACB* sur un cylindre vertical à base quelconque, elle se changera en une courbe à double courbure qui sera encore tautochrone ; de manière qu'un mobile abandonné à l'action de la pesanteur, et forcé de se mouvoir sur cette courbe, atteindra toujours le point le plus bas dans le même tems, quel que soit le point de départ, et quelle que soit aussi la projection horizontale de cette trajectoire.

Réciproquement toutes les tautochrones à double courbure, qui peuvent exister, ne sont que des cycloïdes à base horizontale, enveloppées sur des cylindres verticaux ; car si l'on développe le cylindre vertical sur lequel se trouve une de ces tautochrones, cette courbe deviendra plane, et les propriétés du mouvement d'un corps pesant sur l'une et l'autre trajectoire, seront les mêmes (n° 268); si donc la trajectoire à double courbure est une tautochrone, la trajectoire plane le sera aussi ; par conséquent cette dernière ne pourra être qu'une cycloïde à base horizontale.

285. Cherchons maintenant la courbe qu'un corps pesant doit suivre, pour parvenir d'un point à un autre, dans le tems le plus court; ce qui nous fera connaître une nouvelle propriété de la cycloïde, non moins remarquable que le tautochronisme. On nomme la courbe que nous cherchons, la *brachystochrone*, ou la *ligne de la plus vîte descente.*

Soit K (fig. 63) le point de départ, K' le point que le mobile doit atteindre dans le tems le plus court, KmK' la courbe demandée; désignons par x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque m de cette courbe; prenons les axes des y et des horizontaux, et l'axe des x vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur ; faisons, pour abréger, $\frac{dy}{dx} = p$ et $\frac{dz}{dx} = q$, de manière que l'on ait $dx.\sqrt{1+p^2+q^2}$, pour l'élément de la courbe ; supposons nulle la vitesse initiale; soit enfin $x=a$, $y=b$, $z=c$, au point K, et $x=a'$, $y=b'$, $z=c'$, au point K' : l'ordonnée verticale du point m comptée du point de départ, sera égale à $x-a$ et dt étant toujours l'élément du tems, et g, la pesanteur, la formule du n° 267 deviendra

$$dt = \frac{dx.\sqrt{1+p^2+q^2}}{\sqrt{2g(x-a)}}.$$

Il s'agit donc de trouver la courbe dans laquelle l'intégrale de cette valeur de dt, prise depuis le point K jusqu'au point K', est un *minimum;* mais comme ce problème appartient au *Calcul des variations*, nous allons rappeler en peu de mots, les formules de ce calcul, dont nous aurons ensuite à faire l'application à la valeur de dt.

286. Considérons, en général, l'intégrale $\int V dx$ dans laquelle V est une fonction quelconque de x, y, z, et des coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$

qui seront représentés par p et q; et, parmi toutes les courbes que l'on peut mener par les deux points donnés K et K', proposons-nous de trouver celle qui répond au *minimum* de l'intégrale $\int V dx$, prise depuis le point K jusqu'au point K'; question qui revient à déterminer les valeurs de y et de z en fonction de x, pour lesquelles la valeur de cette intégrale définie, sera plus petite que pour d'autres valeurs quelconques de ces mêmes quantités.

Pour résoudre ce problème, on supposera que les inconnues y et z deviennent $y+\delta y$ et $z+\delta z$, les variations δy et δz étant des fonctions arbitraires de x; les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, ou p et q, deviendront en même tems $\frac{dy}{dx}+\frac{d.\delta y}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}+\frac{d.\delta z}{dx}$; de sorte que les variations correspondantes de p et q, seront

$$\delta p=\frac{d.\delta y}{dx},\quad \delta q=\frac{d.\delta z}{dx}.$$

Or, on démontre

1°. Que l'équation commune au *maximum* et au *minimum* de l'intégrale $\int V dx$, est

$$\int \delta V.dx=0;$$

cette seconde intégrale étant prise entre les mêmes limites que la première, et δV représentant la partie de la variation de V, qui renferme les premières puissances de δy, δz, δp et δq.

2°. Que le *minimum* ou le *maximum* a lieu, selon que la valeur de l'intégrale $\int \delta^2 V . dx$, prise entre les mêmes limites que $\int V dx$, est positive ou négative; $\delta^2 V$ représentant la partie de la variation de V, qui renferme les termes de seconde dimension par rapport à δy, δz, δp et δq.

287. D'après la définition de la quantité δV, on a évidemment

$$\delta V = M\delta y + N\delta z + P\delta p + Q\delta q,$$

en faisant, pour abréger,

$$M = \frac{dV}{dy}, \quad N = \frac{dV}{dz}, \quad P = \frac{dV}{dp}, \quad Q = \frac{dV}{dq};$$

d'ailleurs, en mettant pour δp et δq, leurs valeurs précédentes, et intégrant par parties, il vient

$$\int P\delta p . dx = \int Pd . \delta y = P\delta y - \int \delta y . dP,$$
$$\int Q\delta q . dx = \int Qd . \delta z = Q\delta z - \int \delta z . dQ.$$

Or, les limites de ces intégrales répondent aux points K et K', que l'on suppose invariables et donnés de position; les variations δy et δz doivent donc être nulles à ces limites; par conséquent on doit supprimer les termes $P\delta y$ et $Q\delta z$, qui se trouvent hors du signe $\int$, et alors on a simplement

$$\int \delta V . dx = \int [(Mdx - dP) . \delta y + (Ndx - dQ) . \delta z].$$

J'égale à zéro la quantité comprise sous le signe $\int$, et j'ai, pour l'équation commune au *minimum* et au *maximum*,

$$(Mdx - dP) . \delta y + (Ndx - dQ) . \delta z = 0. \qquad (1)$$

Si les deux inconnues y et z sont tout-à-fait indépendantes entre elles, leurs variations le seront aussi; il faudra donc égaler séparément à zéro, les coefficiens de δy et δz, dans cette équation, qui se décomposera, dans ce cas, en deux autres, savoir :

$$Mdx - dP = 0, \quad Ndx - dQ = 0. \qquad (2)$$

Ces deux équations sont celles de la courbe cherchée; mais elles sont différentielles du second ordre, et il restera à les intégrer dans chaque cas particulier.

Mais si la courbe cherchée doit être tracée sur une surface donnée, et qu'il s'agisse de trouver entre toutes les courbes tracées sur la même surface, celle qui répond au *maximum* ou au *minimum* de l'intégrale $\int Vdx$, les inconnues y et z seront liées entre elles par l'équation de cette surface, à laquelle elles devront encore satisfaire, lorsqu'elles deviennent $y + \delta y$ et $z + \delta z$. En représentant donc par $L = 0$, cette équation, on en conclura, entre les variations δy et δz, l'équation de condition

$$\frac{dL}{dy}.\delta y + \frac{dL}{dz}.\delta z = 0.$$

J'élimine, entre l'équation (1) et celle-ci, l'une des deux variations, et en supprimant l'autre, qui se trouve facteur à tous les termes, je trouve

$$(Mdx - dP).\frac{dL}{dz} - (Ndx - dQ).\frac{dL}{dy} = 0. \qquad (3)$$

Cette équation, jointe à l'équation donnée $L=0$, servira, dans chaque cas particulier, à déterminer les valeurs de y et de z.

Ainsi, les équations (2) et (3) contiennent la solution du problème, dans les deux cas qu'il peut présenter. Il est bon d'observer que l'on peut comprendre ces deux cas dans un seul, en prenant, pour déterminer y et z, les deux équations

$$Mdx - dP + \frac{dL}{dy}.\lambda dx = 0, \quad Ndy - dQ + \frac{dL}{dz}.\lambda dx = 0, \quad (4)$$

dans lesquelles λ est une quantité indéterminée : lorsque y et z seront liées par l'équation $L=0$, on éliminera λ entre ces dernières, et l'on aura l'équation (3) qui convient à ce cas; quand y et z seront, au contraire, indépendantes entre elles, on fera $\lambda=0$, et ces dernières équations coïncideront avec les équations (2).

288. Appliquons maintenant ces formules générales, au problème de la brachystochrone. En prenant pour $L=0$ les équations de différentes surfaces, il sera aisé de former les équations différentielles des courbes de la plus vîte descente sur ces surfaces; mais ce ne sera que dans un très-petit nombre de cas, choisis exprès, que l'on pourra les intégrer; dans le cas du *minimum absolu*, qui sera le seul que nous considérerons, la question admet une solution complète, ainsi qu'on va le voir.

Nous aurons (n° 285)

$$V=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\sqrt{2g(x-a)}};$$

cette valeur de V ne contenant ni y ni z, il s'ensuit $M=0$ et $N=0$; ce qui réduit les équations (2) à $dP=0$ et $dQ=0$; d'où l'on tire, en intégrant,

$$P=C, \quad Q=C';$$

C et C' étant deux constantes arbitraires. En différentiant V par rapport à p et à q, il vient

$$P=\frac{dV}{dp}=\frac{p}{\sqrt{2g(x-a)(1+p^2+q^2)}},$$
$$Q=\frac{dV}{dq}=\frac{q}{\sqrt{2g(x-a)(1+p^2+q^2)}};$$

les équations différentielles du premier ordre de la courbe KmK', seront donc

$$\frac{p}{\sqrt{2g(x-a)(1+p^2+q^2)}}=C,$$
$$\frac{q}{\sqrt{2g(x-a)(1+p^2+q^2)}}=C'.$$

Ces équations donnent $Cq-C'p=0$; multipliant par dx et observant que $qdx=dz$, $pdx=dy$, on a $Cdz-C'dy=0$, et en intégrant

$$Cz-C'y=C'';$$

C'' étant une troisième constante arbitraire. Cette dernière équation est celle d'un plan perpendiculaire à celui des y, z, et par conséquent vertical, puisque le plan des y, z, est horizontal; ce qui

nous apprend d'abord que la courbe cherchée est plane et comprise dans un plan vertical. Comme le plan des x, y est vertical, et que sa direction est arbitraire, il est permis, pour simplifier les calculs qui nous restent à faire, de choisir le plan de la courbe pour celui des coordonnées x, y. On aura alors $z=0$ et $q=0$, et, pour l'équation différentielle de la courbe KmK',

$$\frac{p}{\sqrt{2g(x-a)(1+p^2)}}=C.$$

Je résous cette équation par rapport à p, je multiplie par dx, et je mets dy, à la place de pdx, il vient

$$dy=\frac{(x-a).\sqrt{2C^2g}.dx}{\sqrt{x-a-2C^2g(x-a)^2}}.$$

Si l'on transporte l'origine au point K, l'abscisse a de ce point (n° 285) sera nulle, et en faisant, pour abréger, $\frac{1}{2C^2g}=\gamma$, on aura

$$dy=\frac{xdx}{\sqrt{\gamma x-x^2}};$$

équation différentielle qui appartient à une cycloïde dont la base est la droite horizontale menée par le point K, et dont le cercle générateur a pour diamètre, la constante arbitraire γ. En intégrant cette équation, on trouve

$$y=-\sqrt{\gamma x-x^2}+\frac{\gamma}{2}.\text{arc.}\left(\cos.=\frac{\gamma-2x}{\gamma}\right);$$

la

la constante arbitraire est nulle, parce qu'on a, à la fois, $x=0$ et $y=0$, au point K. On a aussi $x=a'$ et $y=b'$, au point K'; d'où il résulte une équation de condition qui servira à déterminer la constante γ.

Quant à la condition qui distingue le *minimum* du *maximum*, et qui consiste en ce que l'intégrale $\int \delta^2 V.dx$, prise depuis le point K jusqu'au point K', c'est-à-dire, depuis $x=0$ jusqu'à $x=a'$, doit être une quantité positive, il est aisé de vérifier qu'elle est remplie dans le cas actuel; car en faisant $a=0$ et $q=0$, dans la valeur de V, on en déduit

$$\delta^2 V=\frac{1}{2}.(\delta p)^2.\frac{1}{\sqrt{2gx(1+p^2)^3}};$$

or, cette quantité est toujours positive; donc, en la multipliant par dx et prenant son intégrale, ou la somme de ses valeurs comprises entre les limites $x=0$ et $x=a'$, on aura aussi une quantité positive.

Concluons donc de tout ce calcul, que *la courbe de la plus vîte descente d'un point à un autre, est une cycloïde à base horizontale, dont l'origine est au point de départ.*

289. Dans chaque problème particulier, on déterminera les constantes arbitraires, contenues dans les intégrales des équations différentielles du n° 287, en assujétissant la courbe cherchée à passer par les points donnés qui répondent aux limites de l'intégrale $\int V dx$; ces constantes peuvent donc toujours être regardées comme des fonctions des coordonnées de ces points; ainsi, a, b, c étant les coordonnées du point K, et a', b', c', celles du

point K' (nº 285), les équations de la courbe KmK', résolues par rapport à y et à z, seront de cette forme :

$$y=f(x,a,b,c,a',b',c'), \quad z=F(x,a,b,c,a',b',c').$$

Si l'on substitue dans V ces valeurs de y et z, et les valeurs correspondantes de p et q, cette quantité V deviendra aussi une fonction de x, a, b, c, a', b', c' ; et si l'on prend ensuite l'intégrale $\int Vdx$, depuis $x=a$, jusqu'à $x=a'$, on aura, pour résultat, une certaine fonction de a, b, c, a', b', c', que je désignerai par T. La valeur de cette intégrale définie variera avec la position des points K et K' ; par conséquent on peut demander de déterminer leurs coordonnées, de manière que la quantité T soit, de nouveau, un *minimum* ou un *maximum* ; or, on résoudra cette question en prenant la différentielle complète de T, par rapport aux six quantités a, b, c, a', b', c', et en l'égalant à zéro.

L'équation $dT=0$ aura cette forme :

$$dT=Ada+Bdb+Cdc+A'da'+B'db'+C'dc'=0.$$

Elle se décomposera toujours en autant d'équations qu'il y aura d'indéterminées, parmi les quantités a, b, c, a', b', c'. Si, par exemple, les deux points K et K' doivent être pris sur des courbes données, on tirera, des équations de ces courbes, les valeurs de b et c, en fonction de a, et de b' et c', en fonction de a' ; de manière que a et a' seront les deux seules quantités qui resteront indéterminées ; différentiant ces valeurs de b, c, b' et c', et substituant

leurs différentielles dans l'équation $dT=0$, on lui donnera cette autre forme :

$$dT=Eda+E'da'=0;$$

or, les inconnues a et a' étant supposées indépendantes l'une de l'autre, il faut qu'on ait séparément $E=0$, $E'=0$; équations qui serviront à déterminer les valeurs de a et a', qui répondent au *maximum* ou au *minimum* de la quantité T. On s'assurera ensuite que l'un ou l'autre a lieu, en ayant égard au signe de la différentielle seconde de T, qui doit être positive pour le *minimum*, et négative pour le *maximum*.

290. La recherche des plus grandes et des plus petites valeurs de T, ne présentera donc aucune difficulté, toutes les fois que cette quantité sera donnée explicitement, en fonction des coordonnées des points K et K' ; pour l'obtenir sous cette forme, il faudrait d'abord intégrer les équations (4), et ensuite la différentielle Vdx ; ce qui serait le plus souvent impossible ; mais nous allons faire voir que l'on peut former la différentielle complète de T, par rapport aux six quantités a, b, c, a', b', c', sans être obligé d'effectuer ces intégrations.

Nous avons représenté par T, l'intégrale définie $\int Vdx$, prise depuis $x=a$, jusqu'à $x=a'$; T peut donc être considéré comme la somme des valeurs de Vdx, comprises dans cet intervalle ; par conséquent, si a devient $a+da$, T se trouvera diminuée de $V_{,}da$, $V_{,}$ désignant la valeur de V qui répond à $x=a$; et de même a' devenant $a'+da'$,

T augmentera de $V_{,,}da'$, $V_{,,}$ représentant la valeur de V qui répond à $x = a'$: donc la différentielle de T, due à la variation des deux limites de l'intégrale de Vdx, sera

$$V_{,,}da' - V_{,}da.$$

Supposons que l'on fasse varier les quantités a, b, c, a', b', c', qui entrent dans les valeurs de y et de z, et désignons par ω la différentielle de y, et par θ celle de z, provenant de la variation de ces quantités. Il est aisé de voir que les différentielles de p et de q, dues à ces mêmes variations, seront $\frac{d\omega}{dx}$ et $\frac{d\theta}{dx}$; par conséquent la différentielle de la fonction V, prise par rapport aux quantités a, b, c, a', b', c', qui y sont introduites par la substitution des valeurs de y, z, p et q, sera

$$M\omega + N\theta + P.\frac{d\omega}{dx} + Q.\frac{d\theta}{dx};$$

les coefficiens M, N, P, Q étant les mêmes que dans le n° 287. Mais, en général, la fonction V peut contenir plusieurs des quantités a, b, c, a', b', c', avant la substitution des valeurs de y, z, p et q : pour fixer les idées, nous supposerons qu'elle ne renferme que a, indépendamment de cette substitution, comme cela a lieu, par exemple, dans le problème de la brachystochrone ; alors, pour avoir la différentielle complète de V, par rapport aux quantités a, b, etc., il faut ajouter à la formule précédente, un terme Rda, qui représentera la différentielle

de V, prise par rapport à la quantité a que V renferme explicitement. En ayant donc égard aux quantités a, b, c, a', b', c', qui entrent explicitement ou implicitement sous le signe $\int$, la différentielle de $\int V dx$, sera

$$\int\left(M\varpi + N\theta + P.\frac{d\varpi}{dx} + Q.\frac{d\theta}{dx} + Rda\right).dx;$$

donc en ayant égard à la variation de ces quantités, et à celle des limites a et a' de l'intégrale, on aura, pour la différentielle complète de $\int V dx$ ou de T,

$$dT = V_{\prime\prime} da' - V_{\prime} da + da.\int Rdx$$
$$+ \int(M\varpi dx + N\theta dx + Pd\varpi + Qd\theta).$$

Les limites des deux intégrales contenues dans cette formule, sont $x = a$ et $x = a'$; si l'on désigne par $P_{\prime}$, $Q_{\prime}$, $\varpi_{\prime}$, $\theta_{\prime}$, les valeurs de P, Q, ϖ, θ, qui répondent à $x = a$, et par $P_{\prime\prime}$, $Q_{\prime\prime}$, $\varpi_{\prime\prime}$, $\theta_{\prime\prime}$, celles des mêmes quantités, qui répondent à $x = a'$, on aura, par le procédé de l'intégration par parties,

$$\int Pd\varpi = P_{\prime\prime}\varpi_{\prime\prime} - P_{\prime}\varpi_{\prime} + \int\varpi dP,$$
$$\int Qd\theta = Q_{\prime\prime}\theta_{\prime\prime} - Q_{\prime}\theta_{\prime} + \int\theta dQ;$$

la seconde de nos deux intégrales deviendra donc

$$P_{\prime\prime}\varpi_{\prime\prime} - P_{\prime}\varpi_{\prime} + Q_{\prime\prime}\theta_{\prime\prime} - Q_{\prime}\theta_{\prime} + \int[(Mdx - dP)\varpi + (Ndx - dQ)\theta].$$

En vertu des équations (4) du n° 287, cette dernière intégrale est la même chose que

$$-\int\left(\frac{dL}{dy}.\varpi + \frac{dL}{dz}.\theta\right).\lambda dx;$$

par conséquent la valeur de dT devient

$$dT = V_{\prime\prime}da' - V_{\prime}da + P_{\prime\prime}\omega_{\prime\prime} - P_{\prime}\omega_{\prime} + Q_{\prime\prime}\theta_{\prime\prime} - Q_{\prime}\theta_{\prime} + da.\int R dx$$
$$- \int \left(\frac{dL}{dy}.\omega + \frac{dL}{dz}.\theta\right).\lambda dx,$$

Le dernier terme de cette valeur est nul, soit qu'on ait $\lambda = 0$, soit qu'on ait

$$\frac{dL}{dy}.\omega + \frac{dL}{dz}.\theta = 0.$$

Le premier cas a lieu lorsque la courbe KmK' ne doit pas être tracée sur une surface donnée ; et le second, lorsque la surface donnée sur laquelle cette courbe doit être tracée, ne varie pas en même tems que la position des points extrêmes K et K'. En effet, dans le second cas, l'équation $L=0$ de la surface donnée, ne renferme que les coordonnées x, y, z, et ne contient pas les coordonnées a, b, c, a', b', c', des points K et K' ; d'ailleurs les valeurs de y et de z, en fonction de x et de ces dernières coordonnées, tirées des équations de la courbe KmK', et substituées dans l'équation $L=0$, doivent la rendre identique ; par conséquent la différentielle de L, prise par rapport aux quantités a, b, c, a', b', c', en considérant y et z comme des fonctions de ces quantités, doit être égale à zéro ; or, d'après ce que représentent ω et θ, cette différentielle n'est autre chose que le premier membre de l'équation précédente.

Si la surface dont l'équation est $L=0$, dépendait de la position des points K et K', L renfer-

merait explicitement une ou plusieurs de leurs coordonnées ; la différentielle complète de L, par rapport à ces coordonnées, contiendrait donc un nouveau terme provenant de la variation des quantités a, b, etc., contenues explicitement dans L ; cette différentielle complète serait toujours égale à zéro, de sorte qu'en désignant par l ce nouveau terme, on aurait

$$\frac{dL}{dy}.\omega + \frac{dL}{dz}.\theta + l = 0;$$

et alors le dernier terme de dT, au lieu d'être nul, serait égal à $\int l\lambda dx$.

Observons enfin que y étant une fonction de x, a, b, c, a', b', c', sa différentielle complète, prise par rapport à ces sept quantités, se compose du terme ω, qui provient de la variation des six dernières, et du terme pdx, qui exprime la différentielle de y, prise par rapport à x seulement. On a donc $dy = pdx + \omega$; d'où l'on tire $\omega = dy - pdx$; nous aurons de même $\theta = dz - qdx$; par conséquent, si l'on désigne par $p_,$ et $q_,$, les valeurs de p et q, qui répondent au point K, et si l'on fait attention que a, b, c, sont les coordonnées de ce point, on aura

$$\omega_, = db - p_,da, \quad \theta_, = dc - q_,da;$$

et de même, en désignant par $p_{,,}$ et $q_{,,}$, les valeurs de p et de q, relatives au point K', dont les coordonnées sont a', b', c', on aura

$$\omega_{,,} = db' - p_{,,}da', \quad \theta_{,,} = dc' - q_{,,}da'.$$

Je substitue ces valeurs dans celle dT, dont je suppose le dernier terme nul, il vient

$$dT = V_{\prime\prime}da' - V_{\prime}da + P_{\prime\prime}(db' - p_{\prime\prime}da') - P_{\prime}(db - p_{\prime}da) + Q_{\prime\prime}(dc' - q_{\prime\prime}da') - Q_{\prime}(dc - q_{\prime}da) + da.\int Rdx.$$

C'est cette valeur de dT qu'il faudra égaler à zéro, pour trouver les *maxima* et les *minima* de $\int Vdx$, relatifs à la position des points K et K'. Le procédé ordinaire du calcul des variations conduirait aussi au même résultat, en ayant égard aux termes qui se trouvent hors du signe $\int$ dans la variation complète de $\int Vdx$, et qui se rapportent aux limites de cette intégrale.

291. Nous pouvons maintenant déterminer la courbe de la plus vite descente, en supposant variable le point de départ du mobile, ainsi que celui qu'il doit atteindre.

En différentiant par rapport à a, la valeur de V, donnée précédemment, on trouve

$$R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\sqrt{2g(x-a)^3}};$$

et si l'on prend la différentielle complète de V, par rapport à x, p et q, on a

$$dV = -Rdx + Pdp + Qdq;$$

par conséquent

$$\int Rdx = -V + \int Pdp + \int Qdq.$$

Il ne sera question ici, comme dans le n° 288, que du cas où la courbe cherchée KmK', n'est pas assujétie à être tracée sur une surface donnée. Dans ce cas, nous savons déjà que les quantités P et Q sont constantes. Les quantités $P_{\prime}$ et $P_{\prime\prime}$, qui se rapportent aux points extrêmes K et K', sont donc égales entre elles, et égales à la quantité P, qui se rapporte à un point quelconque; et par la même raison, on a $Q_{\prime\prime}=Q_{\prime}=Q$. Mettant donc les constantes $P_{\prime\prime}$ et $Q_{\prime\prime}$ à la place de P et Q, on aura

$$\int Pdp = P_{\prime\prime}p + \text{const.}, \quad \int Qdq = Q_{\prime\prime}q + \text{const.};$$

et l'intégrale indéfinie $\int Rdx$ deviendra

$$\int Rdx = -V + P_{\prime\prime}p + Q_{\prime\prime}q + \text{const.};$$

d'où l'on conclut pour l'intégrale définie, prise depuis $x=a$ jusqu'a $x=a'$,

$$\int Rdx = -V_{\prime\prime} + V_{\prime} + P_{\prime\prime}p_{\prime\prime} - P_{\prime\prime}p_{\prime} + Q_{\prime\prime}q_{\prime\prime} - Q_{\prime\prime}q_{\prime}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans celle de dT, du n° précédent, et que l'on y mette en même tems $P_{\prime\prime}$ et $Q_{\prime\prime}$, à la place de $P_{\prime}$ et $Q_{\prime}$, on trouve, en réduisant,

$$dT = V_{\prime\prime}da' + P_{\prime\prime}(db' - p_{\prime\prime}da') + Q_{\prime\prime}(dc' - q_{\prime\prime}da')$$
$$- V_{\prime\prime}da - P_{\prime\prime}(db - p_{\prime\prime}da) - Q_{\prime\prime}(dc - q_{\prime\prime}da);$$

substituant de nouveau, pour $V_{\prime\prime}$, $P_{\prime\prime}$, $Q_{\prime\prime}$, leurs valeurs, qui se déduisent de celles de V, P, Q, en y faisant $x=a'$, $p=p_{\prime\prime}$, $q=q_{\prime\prime}$, il vient, après

des réductions fort simples,

$$dT = \frac{da' + p_{\prime\prime}db' + q_{\prime\prime}dc' - da - p_{\prime\prime}db - q_{\prime\prime}dc}{D}:$$

le dénominateur D représente ici, pour abréger le radical $\sqrt{2g(1+p_{\prime\prime}^2+q_{\prime\prime}^2)(a'-a)}$. En égalant numérateur à zéro, on aura l'équation d'où dépendent les *maxima* et les *minima* de la fonction T.

292. Cette équation présente différens cas examiner, suivant les conditions diverses auxquelles on assujétit les points K et K'. Nous considérerons d'abord l'un des cas les plus simples, celui où le point K est supposé fixe, et où le point K' doit être pris sur une courbe plane $HK'H'$, située dans un plan vertical passant par le point K. Le problème qui nous occupe, consiste alors à déterminer, parmi toutes les cycloïdes à base horizontale, tracées dans ce plan, et dont l'origine est au point K, celle qu'un corps pesant doit suivre pour atteindre la courbe $HK'H'$, dans le tems le plus court. En prenant ce plan, pour celui des coordonnées x et y, la quantité q sera nulle dans toute l'étendue de la courbe; ainsi l'on aura $q_{\prime\prime}=0$. Le point K étant supposé fixe, on aura aussi $da=0$, $db=0$, $dc=0$; la valeur de dT se réduit donc à

$$dT = \frac{da' + p_{\prime\prime}db'}{D};$$

d'où l'on tire, en égalant son numérateur à zéro,

$$1 + p_a \cdot \frac{db'}{da'} = 0.$$

Or, cette équation exprime que la cycloïde demandée coupe à angle droit la courbe donnée $HK'H'$, c'est-à-dire, qu'au point K', où les deux courbes se rencontrent, leurs tangentes $K'\alpha$ et $K'\mathcal{C}$ sont perpendiculaires entre elles.

Lorsqu'il existera plusieurs cycloïdes à base horizontale, dont le sommet commun sera au point K, et qui couperont à angle droit, la courbe donnée $HK'H'$, il en faudra conclure que la fonction T est susceptible de plusieurs *minima* ou *maxima*. On distinguera les uns des autres par le signe de la différentielle seconde d^2T : les cycloïdes qui répondront à des *minima*, ou à des valeurs positives de d^2T, seront effectivement des cycloïdes de la plus vite descente ; celles, au contraire, qui répondront à des *maxima*, seront des cycloïdes de la moins vite descente.

Si l'on trace la courbe $HK'H'$, de manière qu'elle coupe à angle droit, toutes les cycloïdes à base horizontale, qui ont leur origine au point K, la valeur de T sera la même relativement à tous les points de la courbe ; par conséquent si des corps pesans partent du point K, au même instant, et se meuvent sur les cycloïdes, ils atteindront tous en même tems, la courbe $HK'H'$, ainsi tracée. Son équation différentielle est facile à former ; mais l'inté-

grale de cette équation n'est pas connue sous forme finie.

293. En général, lorsqu'on ne suppose aucune dépendance entre les coordonnées du point K et celles du point K', l'équation $dT=0$, se partage en deux autres, savoir :

$$da'+p_{\prime\prime}db'+q_{\prime\prime}dc'=0,\quad da+p_{\prime\prime}db+q_{\prime\prime}dc=0. \quad (a)$$

Ces équations, jointes à celles des courbes ou des surfaces sur lesquelles les points K et K' doivent se trouver, seront dans tous les cas en même nombre que les coordonnées de ces points, et serviront à les déterminer. La position de K et K' étant connue, on mènera par ces points, dans un plan vertical, une cycloïde KmK', à base horizontale, dont l'origine soit au point K; et cette courbe sera une cycloïde de la plus vite ou de la moins vite descente, selon que la différentielle seconde de T sera positive ou négative.

Les équations (a) nous montrent comment cette cycloïde se trouvera placée par rapport aux courbes ou aux surfaces, sur lesquelles les points K et K' doivent être pris. Supposons, par exemple, que ces points doivent être pris sur deux courbes quelconques GKG', $HK'H'$, planes ou à double courbure; il résulte d'abord de la première équation que la courbe KmK' coupera à angle droit la courbe $HK'H'$, ou que leurs tangentes $K'\alpha$ et $K'\text{6}$ seront perpendiculaires entre elles; ensuite si l'on mène

par le point K, une tangente $K\gamma$ à la courbe GKG', et une parallèle $K\alpha'$ à la droite $K'\alpha$, ces deux droites $K\gamma$ et $K\alpha'$ seront perpendiculaires en vertu de la seconde équation (a). Ainsi quand les trois courbes seront comprises dans un même plan vertical, les tangentes $K\gamma$ et $K'\epsilon$ seront parallèles entre elles, puisqu'elles sont perpendiculaires aux droites parallèles $K'\alpha$ et $K\alpha'$.

Lorsque les points K et K' devront être pris sur des surfaces données, il est aisé de voir, d'après les équations (a), que leurs plans tangens aux points K et K', seront parallèles entre eux et perpendiculaires à la droite $K'\alpha$, tangente à la courbe KmK' au point K'.

CHAPITRE IV.

DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE DONNÉE.

294. DANS ce mouvement, nous pouvons considérer le mobile comme libre, et faire abstraction de la surface sur laquelle il doit se mouvoir, pourvu que nous ajoutions aux forces données, qui agissent sur lui, une force accélératrice, de grandeur inconnue et normale à la surface donnée, dont l'effet soit de détruire à chaque instant la pression que les forces données exercent sur cette surface, ainsi que la vîtesse du mobile, décomposée suivant la normale. Cette nouvelle force représentera la résistance de la surface; elle sera égale et contraire à la pression totale que cette surface éprouve, et qui est due en partie à la vîtesse du mobile. En conservant les dénominations du n° 219, et désignant en outre par N, la force normale inconnue, et par ε, ε', ε'', les angles que sa direction fait avec les axes des x, des y et des z, les équations du mouvement, trouvées dans ce n°, deviendront

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X + N.\cos.\varepsilon, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N.\cos.\varepsilon', \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N.\cos.\varepsilon''. \end{aligned}\right\} \quad (m)$$

Soit $L=0$, l'équation de la surface donnée; on aura pour les cosinus des angles ε, ε', ε'', que la normale fait avec les axes des coordonnées,

$$\cos.\varepsilon = V.\frac{dL}{dx}, \quad \cos.\varepsilon' = V.\frac{dL}{dy}, \quad \cos.\varepsilon'' = V.\frac{dL}{dz};$$

en faisant, pour abréger,

$$V = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}:$$

le double signe $\pm$ provient, comme nous l'avons déjà remarqué (n° 23), de ce que les angles ε, ε', ε'', peuvent se rapporter à la partie de la normale qui tombe dans la concavité de la surface, ou à son prolongement.

Si l'on substitue ces valeurs de $\cos.\varepsilon$, $\cos.\varepsilon'$, $\cos.\varepsilon''$, dans les équations (m); que l'on élimine ensuite N entre ces trois équations, la quantité V s'en ira en même tems, et il restera deux équations différentielles secondes qui ne renfermeront plus que des quantités données, savoir, les forces X, Y, Z, et les différentielles de L, prises par rapport à x, à y et à z. Ces deux équations, jointes à l'équation $L=0$, serviront, dans chaque cas particulier, à déterminer les trois coordonnées du mobile en fonction du tems.

295. Supposons, par exemple, que la pesanteur soit la seule force donnée, qui agisse sur le point matériel, et que la surface sur laquelle il est obligé de se mouvoir, soit une sphère. Prenons l'axe des z,

vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur que nous désignerons par g; nous aurons $X=0$, $Y=0$, $Z=g$; et si nous plaçons l'origine des coordonnées au centre de la sphère, son équation sera

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0,$$

a étant le rayon. On aura donc $L=x^2+y^2+z^2-a^2$; d'où l'on conclut

$$\frac{dL}{dx}=\frac{x}{a}, \quad \frac{dL}{dy}=\frac{y}{a}, \quad \frac{dL}{dz}=\frac{z}{a},$$

et par conséquent

$$V=\pm 1, \ \cos.\varepsilon=\pm\frac{x}{a}, \ \cos.\varepsilon'=\pm\frac{y}{a}, \ \cos.\varepsilon''=\pm\frac{z}{a}.$$

Le rayon de la sphère et son prolongement sont les deux parties de la normale à cette surface; or, les valeurs que nous trouvons pour $\cos.\varepsilon$, $\cos.\varepsilon'$, $\cos.\varepsilon''$, sont en effet les cosinus des angles que fait le rayon, ou son prolongement, avec les axes des coordonnées : les signes inférieurs appartiennent à la direction d'une force qui agirait suivant le rayon même, ou qui tendrait à rapprocher le mobile du centre de la sphère; les signes supérieurs appartiennent à la direction contraire.

Les équations (m) se réduisent à celles-ci :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\pm N.\frac{x}{a}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\pm N.\frac{y}{a}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}=g\pm N.\frac{z}{a}; \quad (1)$$

où les signes supérieurs doivent être pris ensemble, et correspondent aux signes supérieurs des valeurs de

de cos.ϵ, cos.ϵ', cos.ϵ'', et de même par rapport aux signes inférieurs. Pour éliminer $\pm N$, je multiplie la première par y, la seconde par x, et je retranche ensuite l'une de l'autre; il vient $yd^2x - xd^2y = 0$; mais $yd^2x - xd^2y = d.(ydx - xdy)$; en intégrant, on aura donc

$$ydx - xdy = cdt; \qquad (2)$$

c étant la constante arbitraire.

J'aurai une seconde équation différentielle du premier ordre, indépendante de l'inconnue $\pm N$, en ajoutant ensemble les équations (1), après avoir multiplié la première par dx, la seconde par dy, la troisième par dz, ce qui donne

$$\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} = gdz \pm N(xdx + ydy + zdz);$$

or, l'équation de la sphère étant différentiée, donne

$$xdx + ydy + zdz = 0; \qquad (3)$$

on peut donc supprimer le dernier terme de l'équation précédente; et si l'on intègre ensuite les deux membres de cette équation, il vient

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2gz + c'; \qquad (4)$$

c' étant une seconde constante arbitraire.

296. La détermination du mouvement du corps ne dépend plus maintenant que de l'intégration des trois équations du premier ordre (2), (3), (4), dont la seconde a déjà pour intégrale, l'équation de la sphère.

Cette intégration n'est pas possible sous forme finie; mais on peut séparer les variables dans ces équations, et ramener le problème à la méthode des quadratures.

Pour le faire voir, je mets l'équation (3) sous cette forme $xdx+ydy=-zdz$; je l'élève au carré, ainsi que l'équation (2), et j'ajoute ensuite ces deux équations; il vient

$$(x^2+y^2).(dx^2+dy^2)=z^2dz^2+c^2dt^2.$$

J'élimine dx^2+dy^2 dans celle-ci, au moyen de l'équation (4), et x^2+y^2, au moyen de l'équation $x^2+y^2+z^2=a^2$; j'ai pour résultat une équation entre z, dz et dt; en la résolvant par rapport à dt, je trouve

$$dt=\frac{adz}{\sqrt{(a^2-z^2)(c'+2gz)-c^2}}.$$

Si l'on intègre cette formule par approximation, on aura t en fonction de z, et réciproquement z en fonction de t.

297. L'ordonnée z ne suffit pas pour déterminer la position du mobile; elle fait seulement connaître le plan horizontal dans lequel il se trouve à chaque instant; mais il est évident que si l'on avait aussi l'angle que fait la projection horizontale de son rayon vecteur, avec l'axe des x, ou avec celui des y, la position de ce rayon serait entièrement connue, et par conséquent celle du mobile sur la sphère le serait aussi. Or, cet angle est donné en fonction de z par

une formule semblable à la précédente qui donne le tems en fonction de la même variable.

En effet, soit ω l'angle compris entre la projection horizontale du rayon vecteur et l'axe des x; cette projection est égale à $\sqrt{a^2-z^2}$, et l'on a

$$y=\sqrt{a^2-z^2}.\sin.\omega, \quad x=\sqrt{a^2-z^2}.\cos.\omega;$$

d'où l'on tire

$$ydx-xdy=(z^2-a^2).d\omega;$$

l'équation (2) donnera donc

$$d\omega=\frac{cdt}{z^2-a^2}.$$

Substituant pour dt, sa valeur précédente, on aura $d\omega$ sous la forme : $d\omega=Fz.dz$. En intégrant par approximation, on aura ω en fonction de z; et comme z est déjà censée connue en fonction de t, les deux variables z et ω seront connues pour un instant quelconque; donc on pourra, à chaque instant, assigner la position du mobile sur la sphère donnée.

298. On voit par cette analyse que le problème du mouvement d'un corps pesant sur une sphère, dépend en définitif de l'intégration de deux fonctions d'une seule variable. Ce problème comprend le mouvement du pendule simple, dans le cas où la vitesse initiale n'est pas dirigée dans le plan vertical, mené par le point de suspension; alors les oscillations du pendule ne sont plus renfermées dans ce plan; mais le point matériel, suspendu à l'extrémité

du fil inextensible, est toujours assujéti à se mouvoir sur la sphère dont le centre est le point de suspension, et qui a pour rayon, la longueur du fil. On déterminera donc les lois de son mouvement, en développant les valeurs de dt et de $d\omega$ en séries convergentes, et en les intégrant ensuite. Nous nous dispenserons d'effectuer ces calculs, vû que le pendule à oscillations *coniques* n'est d'aucun usage dans la pratique, où l'on fait toujours ensorte que les oscillations soient renfermées dans un même plan.

299. Avant de quitter ce problème particulier, il est bon de montrer comment les équations (1) peuvent servir à déterminer l'inconnue N, et le sens dans lequel cette force normale agit sur le mobile. On obtiendra la valeur de N sous la forme la plus simple, en employant la combinaison suivante de ces trois équations.

Je multiplie la première par x, la seconde par y, la troisième par z, et je les ajoute ensuite; il vient

$$\frac{xd^2x+yd^2y+zd^2z}{dt^2}=gz\pm N.\frac{(x^2+y^2+z^2)}{a}.$$

L'équation $xdx+ydy+zdz=0$, étant différentiée et divisée par dt^2, donne

$$\frac{xd^2x+yd^2y+zd^2z}{dt^2}=-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=-v^2;$$

v étant la vitesse du mobile ; donc, à cause de $x^2+y^2+z^2=a^2$, l'équation précédente devient

$$-v^2=gz\pm Na,\quad \text{ou}\quad \pm N=-\frac{v^2}{a}-\frac{gz}{a}.$$

Tant que le mobile se trouve au-dessous du plan horizontal, mené par le centre de la sphère, l'ordonnée z est positive, et la valeur de $\pm N$ est négative; il faut donc prendre le signe inférieur devant la quantité N, afin que cette quantité, qui représente l'intensité d'une force, soit positive (n° 10); par conséquent il faut aussi prendre les signes inférieurs devant les valeurs de $\cos.\varepsilon$, $\cos.\varepsilon'$, $\cos.\varepsilon''$, parce que ces signes se correspondent; mais alors les angles ε, ε', ε'', appartiennent au rayon de la sphère (n° 295); donc la force N, ou la résistance de la surface, est dirigée suivant ce rayon, ou de dehors en dedans, et la pression que la surface éprouve, est au contraire dirigée suivant le prolongement du rayon, ou de dedans en dehors.

Si le mobile s'élève au-dessus du plan horizontal, mené par le centre de la sphère, l'ordonnée z deviendra négative, et il sera possible que la quantité v^2+gz, le devienne aussi. Quand cela aura lieu, la résistance de la surface sphérique s'exercera suivant le prolongement du rayon, et la pression que cette surface éprouve, sera dirigée suivant le rayon même. Dans tous les cas, la pression sera égale à la quantité $\frac{v^2+gz}{a}$, abstraction faite du signe.

En supposant que le mobile fût retenu sur la sphère par un fil inextensible, attaché au centre et d'une longueur égale au rayon, ce fil sera tendu dans le sens de sa longueur, tant que v^2+gz sera une quantité positive : au contraire, il éprouvera une contraction dans le même sens, lorsque cette quantité

deviendra négative. Cette tension ou cette contraction sera toujours égale à $\frac{v^2+gz}{a}$, abstraction faite du signe.

300. Considérons maintenant les équations générales du n° 294. En différentiant complétement l'équation $L=0$, on a

$$dL=\frac{dL}{dx}.dx+\frac{dL}{dy}.dy+\frac{dL}{dz}.dz=0;$$

d'où l'on conclut

$$\cos.\epsilon.dx+\cos.\epsilon'.dy+\cos.\epsilon''.dz=V.dL=0;$$

par conséquent, si l'on ajoute les équations (m), après avoir multiplié la première par dx, la seconde par dy, la troisième par dz, on aura une équation indépendante de N, savoir :

$$\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dt^2}=Xdx+Ydy+Zdz.$$

Supposons que la formule $Xdx+Ydy+Zdz$ soit la différentielle d'une fonction des trois variables x, y, z, regardées comme indépendantes, et soit $f(x,y,z)$, cette fonction. En intégrant les deux membres de cette dernière équation, nous aurons

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=2f(x,y,z)+C;$$

C étant la constante arbitraire. On en déduit

$$v^2-A^2=2f(x,y,z)-2f(a,b,c), \qquad (a)$$

en désignant par v la vitesse qui répond aux coordonnées x, y, z, et par A celle qui répond aux coordonnées a, b, c.

Nous avons déjà trouvé cette équation dans le cas d'un point matériel libre, et dans celui d'un point astreint à rester sur une courbe donnée; elle a donc lieu dans tous les cas que peut présenter le mouvement d'un point matériel, en supposant, toutefois, que la formule $Xdx + Ydy + Zdz$ soit une différentielle exacte à trois variables. Ainsi, dans cette hypothèse, l'accroissement du carré de la vitesse du mobile, en passant d'un point à un autre, ne dépend jamais de la courbe qu'il décrit dans l'intervalle : il dépend seulement des coordonnées de ces deux points, et de la nature des forces appliquées au mobile. Quand le mouvement a lieu dans une courbe fermée, cet accroissement est nul, et la vitesse redevient la même, toutes les fois que le mobile revient à la même position. Quelle que soit la courbe décrite, la vitesse demeure constante, lorsqu'aucune force accélératrice n'agit sur le mobile, et qu'il se meut en vertu d'une impulsion primitive.

501. Quand la vitesse est connue en fonction des coordonnées x, y, z, il est aisé de déduire immédiatement des équations (m), les équations différentielles de la trajectoire. Pour cela, j'y substitue à la place de $\cos.\epsilon$, $\cos.\epsilon'$, $\cos.\epsilon''$, leurs valeurs; puis je multiplie successivement la première équation par dy et par dz, et je la retranche des deux autres, multi-

pliées par dx; je forme, de cette manière, ces deux équations:

$$dx.\frac{d^2y}{dt^2}-dy.\frac{d^2x}{dt^2}=Ydx-Xdy+NV.\left(\frac{dL}{dy}.dx-\frac{dL}{dx}.dy\right),$$
$$dx.\frac{d^2z}{dt^2}-dz.\frac{d^2x}{dt^2}=Zdx-Xdz+NV.\left(\frac{dL}{dz}.dx-\frac{dL}{dx}.dz\right).$$

Or, on a

$$dx.\frac{d^2y}{dt^2}-dy.\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx^2}{dt^2}.d.\frac{dy}{dx}, \quad dx.\frac{d^2z}{dt^2}-dz.\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx^2}{dt^2}.d.\frac{dz}{dx};$$

et dans ces formules, les différentielles de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ peuvent être prises en regardant telle variable qu'on voudra, comme la variable indépendante; d'ailleurs, en désignant par ds l'élément de la trajectoire, et toujours par v la vitesse, on aura

$$\frac{dx}{dt}=v.\frac{dx}{ds};$$

il s'ensuit donc

$$v^2.\frac{dx^2}{ds^2}.d.\frac{dy}{dx}=Ydx-Xdy+NV.\left(\frac{dL}{dy}.dx-\frac{dL}{dx}.dy\right),$$
$$v^2.\frac{dx^2}{ds^2}.d.\frac{dz}{dx}=Zdx-Xdz+NV.\left(\frac{dL}{dz}.dx-\frac{dL}{dx}.dy\right).$$

Ce qu'il y a de plus simple, en général, c'est de prendre les différentielles de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, en regardant x comme la variable indépendante, ou en supposant dx constante; on a alors

$$d.\frac{dy}{dx}=\frac{d^2y}{dx}, \quad d.\frac{dz}{dx}=\frac{d^2z}{dx};$$

substituant en outre, dans les deux dernières équations, à la place de v sa valeur en fonction de x, y, z, et éliminant entre elles l'inconnue NV, il en résultera une équation différentielle du second ordre entre les trois coordonnées x, y, z : celle-ci et $L=0$, seront les deux équations de la trajectoire.

Si le mobile est entièrement libre, on fera $N=0$, dans les équations précédentes, qui deviendront les deux équations différentielles secondes de la trajectoire.

302. On pourrait déterminer la valeur de N et le signe de la quantité V, au moyen des équations (m), ce qui ferait connaître la pression que la surface donnée éprouve en chacun de ses points, et le sens dans lequel cette pression s'exerce; mais on y parviendra d'une manière plus simple et plus directe, en considérant la pression que la trajectoire du mobile supporte; pression que l'on déterminera par la règle du n° 255.

En effet, soit EmD (fig. 64), la courbe plane ou à double courbure que le mobile décrit sur la surface donnée; supposons que nmn' soit la normale à cette courbe, comprise dans son plan osculateur au point m, de manière que la partie mn de cette droite, qui tombe hors de la concavité de la courbe, soit la direction de la force centrifuge; l'intensité de cette force sera exprimée par $\frac{v^2}{\gamma}$, en appelant v la vitesse du mobile au point m, et γ le rayon de courbure de sa trajectoire au même point. Soit en outre, comme

dans le n° cité, P la pression due aux forces X, Y, Z, qui agissent sur le mobile; la résultante des deux forces $\frac{v^2}{\gamma}$ et P, perpendiculaires à la trajectoire, sera la pression totale que cette courbe supporte au point m; or, si la trajectoire EmD était une courbe fixe et donnée, il suffirait que la pression totale se trouvât comprise dans le plan normal à cette courbe, mené par le point m, pour qu'elle fût détruite; mais dans la question présente, cette courbe n'est pas fixe; elle est seulement tracée sur une surface donnée, dont la résistance peut seule détruire la pression qu'éprouve la trajectoire : il faut donc que cette pression, ou la résultante des forces $\frac{v^2}{\gamma}$ et P, soit dirigée suivant la normale à cette surface, au point m.

D'après cela, menons, par le point m, trois axes rectangulaires mA, mC, mB, dont le premier soit pris sur la normale à la surface, le second sur la tangente à la courbe EmD, et le troisième dans le plan tangent à la surface. L'angle Cmn, compris entre l'axe mC et la direction mn de la force $\frac{v^2}{\gamma}$, est droit, puisque l'une de ces deux droites est normale et l'autre tangente à la courbe EmD; appelons α et $\mathcal{C}$, les angles aigus ou obtus, compris entre cette direction et les axes mA et mB, ensorte qu'on ait $Amn=\alpha$ et $Bmn=\mathcal{C}$; désignons encore par R, la résultante des forces X, Y, Z, et par a, b, c, les angles que sa direction fait avec les axes mA, mB, mC; les composantes de R, suivant ces axes, seront $R.\cos.a$;

$R.\cos.b$, $R.\cos.c$; celles de la force $\frac{v^2}{\gamma}$, suivant les mêmes axes, seront $\frac{v^2}{\gamma}.\cos.\alpha$, $\frac{v^2}{\gamma}.\cos.6$, et $\frac{v^2}{\gamma}.\cos.100°$ ou zéro. De cette manière, la composante $R.\cos.c$, qui agit seule suivant la tangente mC à la trajectoire du mobile, est la force qui produit le mouvement; la somme des composantes $R.\cos.b$ et $\frac{v^2}{\gamma}.\cos.6$, perpendiculaires à la trajectoire et dirigées dans le plan tangent à la surface donnée, doit être nulle, sans quoi la pression ne serait plus perpendiculaire à cette surface; enfin, la somme $R.\cos.a+\frac{v^2}{\gamma}.\cos.\alpha$, des composantes normales à la surface donnée, exprime la pression que cette surface éprouve, et cette pression s'exerce suivant la partie mA de la normale, ou suivant son prolongement, selon que cette somme est positive ou négative.

303. En égalant à zéro la somme des composantes qui doit être nulle, on aura l'équation

$$R.\cos.b+\frac{v^2}{\gamma}.\cos.6=0,$$

qui pourra servir à déterminer, en chaque point de la surface donnée, l'inclinaison du plan osculateur de la trajectoire, sur le plan tangent à cette surface; car cette inclinaison n'est autre chose que l'angle 6, ou l'angle Bmn, compris entre les droites mn et mB, qui sont menées dans ces plans, perpendiculairement à leur intersection commune.

Lorsque le mobile n'est sollicité par aucune force accélératrice, on a $R=0$; donc $\cos.6=0$, et $6=100°$; donc alors, le plan osculateur de la trajectoire est toujours perpendiculaire à la surface donnée. Or, on sait que cette propriété appartient exclusivement à la ligne la plus courte que l'on puisse mener sur cette surface, d'un point donné à un autre point aussi donné; il en résulte donc que le mobile suit le chemin le plus court pour parvenir d'un point à un autre de la surface donnée. Il en serait de même si le mobile éprouvait un frottement contre cette surface, ou s'il était soumis à l'action de toute autre force accélératrice dirigée suivant la tangente à sa trajectoire; car R étant cette force dirigée suivant mC, ou suivant son prolongement, l'angle b, compris entre sa direction et l'axe mB, serait droit, et le terme $R.\cos.b$ disparaîtrait toujours dans l'équation précédente; on aurait donc $\cos.6=0$ et $6=100°$, comme dans le cas où le mobile n'est sollicité par aucune force.

304. Cette propriété de la trajectoire d'un mobile qui n'est soumis à l'action d'aucune force accélératrice, n'est qu'un cas particulier d'une autre propriété plus générale, que l'on a d'abord envisagée sous un point de vue métaphysique, et à laquelle on a donné la dénomination impropre de *principe de la moindre action*. Pour s'en former une idée précise, que l'on se représente un corps partant d'un point donné A, et arrivant à un autre point B, aussi donné; que sa vitesse au point A soit donnée en

grandeur et inconnue en direction, et que les forces accélératrices qui le sollicitent pendant son mouvement, soient telles, que la formule $Xdx+Ydy+Zdz$ soit une différentielle exacte à trois variables; on pourra alors déterminer la vîtesse v du mobile en fonction des coordonnées x, y, z, sans connaître la courbe que le mobile suit pour aller du point A au point B (n° 300); supposons que l'on multiplie cette vîtesse par l'élément ds de la courbe, et que l'on prenne l'intégrale $\int v ds$ depuis le point A jusqu'au point B; il est évident que la valeur de cette intégrale définie dépendra de la nature de cette courbe : or, le principe de la moindre action consiste en ce que le mobile, s'il se meut librement, choisira entre toutes les courbes que l'on pourrait mener par les points A et B, la courbe pour laquelle l'intégrale $\int v ds$ est un *minimum* ; et s'il est astreint à se mouvoir sur une surface donnée, il choisira encore la courbe qui répond au *minimum* de cette intégrale, entre toutes les courbes tracées sur la surface et menées par les points A et B.

La démonstration de ce principe se réduit à prouver que la variation de l'intégrale $\int v ds$ est nulle, les deux points extrêmes de la courbe étant supposés fixes. Or, d'après les règles les plus simples du calcul des variations, on a

$$\delta . \int v ds = \int \delta . v ds, \quad \text{et} \quad \delta . v ds = \delta v . ds + v \delta . ds.$$

D'ailleurs dt étant l'élément du tems, on a $ds = v dt$; donc

$$\delta v . ds = \frac{dt}{2} . \delta . v^2.$$

Si l'on différentie l'équation (a), du n° 300, et que l'on remplace les différentielles dx, dy, dz, par les variations δx, δy, δz, on aura

$$\frac{1}{2}.\delta.v^2=(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z).$$

En ayant égard aux valeurs de cos. ε, cos. ε', cos. ε'', données dans le n° 294, et en faisant attention que

$$\delta L=\frac{dL}{dx}.\delta x+\frac{dL}{dy}.\delta y+\frac{dL}{dz}.\delta z,$$

les équations (m) du même n°, donneront

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z=\frac{d^2x}{dt^2}.\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}.\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}.\delta z-NV.\delta L;$$

le terme $NV.\delta L$ n'entrerait pas dans cette équation si le mobile se mouvait librement; quand il est assujéti à se mouvoir sur une surface donnée, ce terme est nul, parce qu'alors $\delta L=0$; donc on doit supprimer ce terme, dans tous les cas, et il en résulte

$$\delta v.ds=\frac{dt}{2}.\delta.v^2=\frac{d^2x}{dt}.\delta x+\frac{d^2y}{dt}.\delta y+\frac{d^2z}{dt}.\delta z.$$

Quant au second terme $v.\delta.ds$, de la variation de vds, nous avons

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

et par conséquent

$$\delta.ds=\frac{dx}{ds}.d.\delta x+\frac{dy}{ds}.d.\delta y+\frac{dz}{ds}.d.\delta z;$$

donc, à cause de $ds = vdt$, nous aurons

$$v.\delta.ds = \frac{dx}{dt}.d.\delta x + \frac{dy}{dt}.d.\delta y + \frac{dz}{dt}.d.\delta z.$$

Réunissant ces deux parties de la valeur de $\delta.vds$, il vient

$$\delta.vds = d.\left(\frac{dx}{dt}.\delta x + \frac{dy}{dt}.\delta y + \frac{dz}{dt}.\delta z\right);$$

d'où l'on conclut

$$\int \delta.vds = \frac{dx}{dt}.\delta x + \frac{dy}{dt}.\delta y + \frac{dz}{dt}.\delta z,$$

quantité nulle aux deux limites de l'intégrale, puisque les deux points extrêmes A et B étant fixes, les variations δx, δy, δz des coordonnées doivent être nulles pour ces points. La variation de $\int vds$ est donc égale à zéro; par conséquent, cette intégrale est un *maximum* ou un *minimum;* mais il est aisé de voir que la quantité $\int vds$, par sa nature, ne saurait être susceptible d'un *maximum;* donc cette intégrale est un *minimum*, relativement à la trajectoire du mobile, déterminée par les équations du mouvement.

Lorsque le mobile n'est soumis à aucune force accélératrice, nous savons que sa vitesse est constante; l'intégrale définie $\int vds$ devient donc le produit vs, et alors c'est l'arc s décrit par le mobile, du point A au point B, qui est un *minimum*, comme on l'a déjà vu dans le n° précédent. Il suit aussi de l'uniformité du mouvement, qu'alors le mobile parvient d'un point à l'autre, dans un tems plus court que s'il était forcé de suivre toute autre courbe que sa trajectoire.

305. La formule $Xdx + Ydy + Zdz$ est une différentielle exacte, toutes les fois que les forces appliquées au mobile, sont dirigées vers des centres fixes, et que leurs intensités sont fonction des distances à ces centres (n° 225); le principe de la moindre action a donc lieu, relativement à cette espèce de forces. En cherchant alors la courbe qui répond au *minimum* de l'intégrale $\int vds$, par les règles du calcul des variations, on obtiendra les équations de la trajectoire. Leur forme dépendra du système des coordonnées dont on fera usage, pour déterminer la position du mobile : si l'on emploie les coordonnées rectangulaires x, y, z, on retrouvera les équations du n° 301; mais quelquefois on en obtiendra de plus simples, en faisant usage d'autres coordonnées. Pour en donner un exemple, considérons le cas d'une seule force dirigée vers un centre fixe. La trajectoire est alors une courbe plane, dont le plan est celui qui passe par le centre fixe et la direction de la vitesse initiale du mobile. Menons, par ce centre et dans ce plan, une droite arbitraire; soit θ, l'angle compris entre cette droite et le rayon vecteur à un instant quelconque; désignons par r, ce rayon ou la distance du mobile au centre fixe, et par R l'intensité de la force dirigée vers ce centre. L'équation (a), du n° 300, donnera, dans le cas que nous examinons,

$$v^2 = C - 2\int Rdr;$$

C étant une constante dépendante de la vitesse initiale du mobile, et des coordonnées de son point de départ. Regardons θ comme fonction de r, et soit

Soit $\frac{d\theta}{dr}=p$; nous aurons

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = dr.\sqrt{1+r^2p^2};$$

en faisant donc, pour abréger,

$$V = \sqrt{1+r^2p^2}.\sqrt{C-2\int Rdr},$$

il s'agira de trouver la courbe qui répond au *minimum* de l'intégrale $\int Vdr$.

Or, d'après les formules rappelées dans le n° 287, l'équation différentielle de cette courbe plane, entre les coordonnées polaires r et θ, sera

$$\frac{dV}{d\theta}.dr - d.\frac{dV}{dp} = 0.$$

Mais on a

$$\frac{dV}{d\theta} = 0, \quad \frac{dV}{dp} = \frac{r^2p.\sqrt{C-2\int Rdr}}{\sqrt{1+r^2p^2}};$$

cette équation se réduit donc à $d.\frac{dV}{dp}=0$; et en intégrant, on a

$$\frac{r^2p.\sqrt{C-2\int Rdr}}{\sqrt{1+r^2p^2}} = b,$$

b étant la constante arbitraire. Je remets $\frac{d\theta}{dr}$ à la place de p, et en résolvant l'équation par rapport à $d\theta$, je trouve

$$d\theta = \frac{bdr}{r.\sqrt{Cr^2 - 2r^2\int Rdr - b^2}}.$$

Il ne restera donc plus qu'à intégrer cette valeur de

$d\theta$ lorsque la force R sera donnée en fonction de r, et l'on aura l'équation de la trajectoire, en coordonnées polaires r et θ.

Dans le cas où cette force sera en raison inverse du carré de r, on trouvera, comme dans le nº 243, l'équation d'une section conique, dont le centre fixe occupe un foyer. La trajectoire serait encore une section conique, mais dont le point fixe serait le centre et non pas le foyer, si l'on supposait la force R proportionnelle à r. C'est ce qu'on trouvera aisément en intégrant, dans cette hypothèse, la valeur de $d\theta$. Ainsi, un point matériel peut décrire une section conique de deux manières différentes : quand la force qui le sollicite est dirigée vers le centre de la courbe et proportionnelle à sa distance à ce point, et lorsque cette force est dirigée vers un des deux foyers et en raison inverse du carré de la distance du mobile à ce foyer.

306. L'application la plus remarquable qu'on ait faite du principe de la moindre action, a été d'en déduire les lois connues de la *réfraction* et de la *réflexion* de la lumière. Quoique cette question n'ait qu'un rapport éloigné avec la matière que nous traitons dans ce chapitre, on ne trouvera pas déplacé le calcul suivant, qui d'ailleurs est très-simple.

Tant qu'un rayon lumineux se meut dans un milieu d'une égale densité, sa vitesse et sa direction restent les mêmes; mais lorsqu'il passe d'un milieu dans un autre, sa direction s'infléchit et sa vitesse change. Dans l'instant de ce passage, la lumière décrit une

courbe d'une étendue inappréciable, et dont on peut faire abstraction, sans erreur sensible. La trajectoire de chaque molécule lumineuse est donc alors l'assemblage de deux droites, dont chacune est décrite d'un mouvement uniforme; ainsi, en appelant y et y' les longueurs de ces droites, n la vitesse de la lumière dans le premier milieu, n' la vitesse dans le second, on aura ny, pour la valeur de l'intégrale $\int v ds$, prise depuis le point de départ de la molécule, jusqu'à son entrée dans le second milieu, et $n'y'$, pour la partie de cette intégrale relative au second milieu; par conséquent la valeur de cette intégrale, prise dans toute l'étendue de la trajectoire, sera exprimée par $ny+n'y'$; c'est donc cette somme $ny+n'y'$, qui doit être un *minimum*, d'après le principe de la moindre action.

Avant d'aller plus avant, observons que si le second milieu est une substance diaphane et cristallisée, la vitesse de la lumière, dans cette substance, dépendra en général de la direction du rayon lumineux; de manière qu'elle sera constante pour un même rayon, mais variable d'un rayon à un autre. Le phénomène de la *double réfraction* que présente le *spath d'Islande* et la plupart des cristaux diaphanes, tient à la différence de vitesse des différens rayons lumineux qui les traversent; on doit alors regarder la vitesse n', comme une fonction des angles qui déterminent la direction de chaque rayon; et la loi de la réfraction dépend de la forme qu'on suppose à cette fonction. En faisant une hypothèse convenable sur cette forme, M. *Laplace* est parvenu à déduire

30..

du principe de la moindre action, la loi de la double réfraction, découverte par *Huyghens* et confirmée par les expériences de M. *Malus*; mais ce n'est point ici le lieu d'exposer cette théorie (*); nous nous bornerons à considérer le cas où tous les rayons se meuvent avec la même vitesse, quelles que soient leurs directions. Ainsi, dans le calcul suivant, n et n' seront regardées comme des quantités données pour chaque milieu en particulier, et indépendantes de la direction des différens rayons lumineux.

307. Soient maintenant A et B (fig. 65), les deux points extrêmes de la trajectoire; supposons que la surface de séparation des deux milieux soit plane, et menons par ces deux points, un plan perpendiculaire à cette surface, qui la coupe suivant la droite CD; soit encore AEB, une ligne brisée au point E, qui représente la projection de la trajectoire sur ce plan; menons par ces points A, B, E, les perpendiculaires AH, BH', KEK', sur la droite CD. Puisque la position des points A et B est donnée, les trois droites AH, BH', HH' sont connues; mais la position du point E et les angles AEK et BEK' sont inconnus, et doivent être déterminés par la condition du *minimum*; nous supposerons donc

$$AH=a,\quad BH'=b,\quad HH'=c,\quad AEK=x,\quad BEK'=x';$$

les triangles rectangles AHE, $BH'E$ donneront

(*) Voyez le Mémoire de M. Laplace, inséré dans le volume de l'Institut pour l'année 1809, et l'ouvrage qui a pour titre : *Théorie de la double réfraction*, par M. Malus.

$$HE = a.\text{tang}.x, \quad HE' = b.\text{tang}.x';$$

par conséquent on aura

$$c = a.\text{tang}.x + b.\text{tang}.x'. \qquad (1)$$

Le rayon lumineux traverse la surface de séparation des deux milieux, en un point dont E est la projection sur le plan de la figure; si nous appelons z, la distance de ce point inconnu au point E, il est évident que y sera l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont z et AE seront les deux autres côtés, et que y', z et BE seront de même l'hypothénuse et les deux côtés d'un second triangle rectangle; mais en considérant les triangles AEH et BEH', on a

$$AE = \frac{a}{\cos.x}, \quad BE = \frac{b}{\cos.x'};$$

on aura donc

$$y = \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{\cos^2.x}}, \quad y' = \sqrt{z^2 + \frac{b^2}{\cos^2.x'}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la quantité $ny + n'y'$, on aura, pour résultat, une fonction de z, x, x', qui devra être un *minimum* par rapport à ces trois variables, dont les deux dernières sont liées entre elles par l'équation (1); il faudra donc d'abord que la différentielle de cette fonction, prise par rapport à z, soit égale à zéro; d'où l'on conclut

$$n.\frac{dy}{dz} + n'.\frac{dy'}{dz} = \frac{nz}{y} + \frac{n'z}{y'} = 0,$$

à cause de $\frac{dy}{dz} = \frac{z}{y}$ et $\frac{dy'}{dz} = \frac{z}{y'}$. Or, on ne peut satisfaire

à cette équation que par la valeur $z=0$; ce qui nous apprend que le rayon lumineux traverse au point E, la surface de séparation des deux milieux, et par conséquent, qu'il ne sort pas du plan perpendiculaire à cette surface, mené par les points A et B.

En faisant donc $z=0$, on aura simplement

$$ny+n'y'=\frac{an}{\cos.x}+\frac{bn'}{\cos.x'};$$

et en égalant à zéro la différentielle complète de cette quantité, il vient

$$\frac{an.\sin.x.dx}{\cos^2.x}+\frac{bn'.\sin.x'.dx'}{\cos^2.x'}=0;$$

mais en différentiant de même l'équation (1), on a aussi

$$\frac{a.dx}{\cos^2.x}+\frac{b.dx'}{\cos^2.x'}=0;$$

et si l'on élimine $\frac{dx'}{dx}$ entre ces deux équations, on trouve

$$n.\sin.x=n'.\sin.x'. \qquad (2)$$

Celle-ci, jointe à l'équation (1), servira à déterminer les valeurs de x et x', qui répondent au *minimum* de la quantité $ny+n'y'$. Après avoir calculé la valeur de x, on construira le point E en prenant $HE=\frac{a}{\cos.x}$; ensuite on tirera les droites AE et BE: la ligne brisée AEB sera la route que suit le rayon lumineux, pour aller du point A au point B.

L'angle AEK, compris entre la normale à la surface de séparation des deux milieux, et le rayon

incident AE, se nomme l'*angle d'incidence ;* l'angle BEK', compris entre le prolongement de cette normale et le rayon refracté BE', s'appelle l'*angle de réfraction;* ces angles ont été désignés par x et x'; ainsi l'équation (2) fera connaître l'angle de réfraction, quand l'angle d'incidence sera donné; et l'on voit, d'après cette équation, que *le sinus de l'angle de réfraction est au sinus de l'angle d'incidence dans un rapport constant.*

C'est en effet la loi connue de la réfraction de la lumière. Le rapport des deux sinus dépend des vitesses n et n' relatives aux milieux que l'on considère, et pour cette raison, il varie avec les différentes espèces de milieux diaphanes.

308. Si le rayon lumineux, au lieu de pénétrer dans le second milieu, est réfléchi à la surface de séparation, sa vitesse sera constante dans toute l'étendue de la trajectoire, qui est alors comprise en entier dans un même milieu ; l'intégrale $\int v ds$ sera donc égale à la longueur de cette trajectoire, multipliée par la vitesse constante; par conséquent cette longueur sera un *minimum*, en vertu du principe de la moindre action. Supposons donc, comme dans le cas précédent, que la surface de séparation est plane; soient A et B (fig. 66), les deux points extrêmes de la trajectoire ; menons par ces deux points, un plan perpendiculaire à cette surface, et qui la coupe suivant la droite CD; chaque molécule de lumière ira du point A au point B, en suivant une ligne brisée qui sera la plus courte de toutes celles qui se réflé-

chissent sur la surface de séparation. Or, il est d'abord évident que cette ligne sera comprise dans le plan perpendiculaire à cette surface, car toute autre trajectoire serait plus longue que sa projection sur ce plan. De plus, il est aisé de prouver, sans aucun calcul, que la plus courte ligne brisée est celle qui fait deux angles égaux avec la ligne CD; c'est-à-dire, que si les angles AED et BEC sont égaux, la ligne brisée AEB sera plus courte que toute autre ligne brisée, telle que $AE'B$. En effet, abaissons du point A, la perpendiculaire AH sur la droite CD, prolongeons cette perpendiculaire d'une quantité $A'H$, égale à AH, et tirons ensuite les droites $A'E$ et $A'E'$; les deux angles AEH et $A'EH$ seront égaux; donc les deux angles $A'EH$ et CEB le seront aussi, et la ligne BEA' sera droite; on aura donc $BE+EA' < BE'+E'A'$; mais $EA'=EA$, $E'A'=E'A$; par conséquent $BE+EA < BE'+E'A$.

Si l'on élève au point E, la perpendiculaire EK sur la droite CD, AEK et BEK seront les angles d'incidence et de réflexion, du rayon lumineux qui va du point A au point B, en se réfléchissant au point E; ces angles sont égaux, puisqu'ils sont complémens des angles égaux AED et BEC; d'où il résulte la loi connue de la réflexion [illegible] lumière, qui consiste en ce que l'angle de réflexion est toujours égal à l'angle d'incidence.

FIN DU SECOND LIVRE.

ADDITIONS.

On se propose de réunir dans ces additions, quelques notions élémentaires sur les machines dont l'usage est le plus fréquent.

La recherche des conditions d'équilibre, dans ces machines, est uniquement fondée sur la composition des forces qui concourent en un point, et sur celle des forces parallèles. J'ai donc cru utile, avant d'expliquer ces conditions, de démontrer synthétiquement et d'une manière facile, la règle du parallélogramme des forces; et pour remplir mon objet, je n'ai rien trouvé de mieux à faire que de rapporter ici la démonstration de M. *Duchayla*. On pourra, si l'on veut, substituer cette démonstration à celle que l'on trouve au commencement de ce traité (n° 14), et qui suppose des connaissances assez élevées d'analyse. A l'égard de la composition des forces parallèles, il en existe aussi une démonstration directe et synthétique qui convient aux élémens de Statique et que j'ai donnée dans le n° 32.

Démonstration du parallélogramme des forces.

La résultante de deux forces quelconques, appliquées en un même point et représentées par des droites prises sur leurs directions, à partir de ce point, est représentée en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces.

La démonstration suivante est composée de deux parties: nous allons d'abord prouver que la résultante est dirigée suivant la diagonale, et nous ferons voir ensuite qu'elle est représentée en grandeur par cette ligne. Dans la première partie nous admettrons qu'on peut, sans rien changer à l'action d'une force, transporter son point d'application, en tel autre point

qu'on veut, pris sur sa direction, et qu'on regarde comme fixement attaché au premier; c'est en effet ce qu'il est aisé de prouver par un raisonnement direct et fort simple, ainsi qu'on peut le voir dans le n° 28.

Cela posé, si la résultante est effectivement dirigée suivant la diagonale, quand les composantes sont entre elles comme les quantités p et m, et quand elles sont représentées par les quantités p et n, je dis qu'elle sera encore dirigée suivant la diagonale, lorsque les composantes seront représentées par p et $m+n$, pourvu que l'angle compris entre les composantes soit le même dans les trois cas.

En effet supposons que le point A (fig. 67) est tiré par les deux forces p et $m+n$, qui agissent suivant les directions AB et AC; prenons $AB=p$, $AE=m$, $EC=n$; la force p sera représentée en grandeur et en direction par AB, et la force $m+n$ par AC. On pourra partager celle-ci en deux autres: l'une égale à m, qui restera appliquée au point A, et qui sera représentée par AE; l'autre égale à n, dont je transporterai le point d'application en E, et qui sera représentée par EC. Par hypothèse, la résultante des deux forces AB et AE sera dirigée suivant la diagonale AF du parallélogramme $ABEF$; je la transporte en F, où elle agira suivant FK, prolongement de AF; puis je la décompose en deux forces dirigées suivant les prolongemens FG et FH des côtés BF et EF; ponr cela, je prends $FH=AB$ et $FG=AE$, et je forme le parallélogramme $FHKG$, égal à $ABFE$: il est évident que FH et FG seront les composantes de la force dirigée suivant FK, de même que AB et AE étaient celles de la force dirigée suivant AF. Puisque $FH=AB=EF$, on peut remplacer FH par la force EF appliquée au point E; mais d'après l'hypothèse, la résultante des deux forces EF et EC est dirigée suivant la diagonale ED du parallélogramme $EFDC$; si donc on transporte cette force au point D, où sa direction coupe celle de la force FG, et que l'on applique celle-ci au même point, la résultante de ces deux forces passera aussi par le point D; par conséquent les trois forces EC, FH et FG, se réduisent

en définitif à une force unique, dont la direction passe par le point D. Or, ces forces remplacent les deux forces données AB et AC, auxquelles elles sont équivalentes; la résultante de celles-ci doit donc aussi passer par le point D; et comme elle passe déjà par le point A, il s'ensuit qu'elle sera dirigée suivant la diagonale AD du parallélogramme $ABCD$.

Dans le cas de deux forces égales, et qui font un angle quelconque, la résultante coupe cet angle en deux parties égales; elle est donc alors dirigée suivant la diagonale du *lozange* construit sur les deux forces; or, en partant de ce cas particulier, et de ce qui vient d'être prouvé, il aisé de conclure que la résultante doit être dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces, toutes les fois qu'elles seront représentées par des nombres entiers quelconques. En effet, si l'on prend $p = 1$ et $n = 1$, et qu'on fasse successivement $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, etc., la proposition sera d'abord vraie pour les forces égales 1 et 1, ensuite pour les forces 1 et $1 + 1$, ou 1 et 2; 1 et $2 + 1$, ou 1 et 3; 1 et $3 + 1$, ou 1 et 4; et généralement, pour les forces 1 et N, N désignant un nombre entier quelconque. Ensuite si l'on prend $p = N$ et $n = 1$, et successivement $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, etc., la proposition sera encore vraie pour les forces N et 1; N et $1 + 1$, ou N et 2; N et $2 + 1$, ou N et 3; N et $3 + 1$, ou N et 4; et généralement, pour les forces N et M, M étant ainsi que N un nombre entier quelconque.

La proposition étant démontrée pour deux forces commensurables, il est aisé de l'étendre, par le raisonnement ordinaire de la réduction à l'absurde, au cas de deux forces incommensurables. Pour cela, soient AB et AC (fig. 68) les deux forces; si leur résultante n'est pas dirigée suivant la diagonale AD, du parallélogramme $ABCD$, elle le sera suivant une autre droite, telle que AD', qui coupe en D', le côté DC; menons par ce point une parallèle $D'B'$ au côté DB, et soit B', l'intersection de cette parallèle avec le côté AB; divisons le côté AC, en parties égales, plus petites que BB',

de manière qu'en portant ces parties sur la droite AB, à partir du point A, au moins un des points de division vienne tomber entre les points B et B', par exemple en E. Si l'on considère les deux forces AC et AE, qui sont commensurables, leur résultante sera dirigée suivant la diagonale AF, du parallélogramme $AEFC$, laquelle diagonale est comprise, d'après la construction, entre les deux droites AD et AD'; or, la force AC, restant la même, et l'autre composante AB diminuant et devenant AE, la résultante doit s'éloigner de la direction AB, pour s'approcher de la direction AC; il est donc absurde que la résultante des forces AB et AC soit dirigée suivant AD', et celle des forces AE et AC, suivant AF; par conséquent il est impossible que la résultante de AB et AC, soit dirigée suivant une ligne AD' différente de la diagonale AD, puisque cette hypothèse conduirait à un résultat absurde.

Démontrons maintenant que la résultante est représentée en grandeur, par la longueur de la diagonale. Soient toujours AB et AC (fig. 69), les deux composantes; formons le parallélogramme $ABCD$, la diagonale AD représentera la direction de la résultante; si donc on applique suivant son prolongement AD', une force égale et contraire à cette résultante; cette force, inconnue en grandeur et que j'appellerai R, fera équilibre aux deux forces AB et AC; or, les trois forces AB, AC et R étant ainsi en équilibre autour du point A, celle qu'on voudra des trois est égale et directement opposée à la résultante des deux autres; par conséquent si l'on prend sur le prolongement de AB, une partie $AB' = AB$, la force AB' sera, en grandeur et en direction, la résultante de la force AC et de la force R qui agit suivant AD'. D'un autre côté, la droite AB' étant égale et parallèle à DC, il s'ensuit que la droite $B'C$ est aussi égale et parallèle à AD; elle est donc aussi parallèle au prolongement AD', et en menant par le point B', une parallèle $B'D'$ à AC, la figure $ACB'D'$ sera un parallélogramme. Donc puisque la résultante des forces R et AC doit être dirigée suivant la diagonale AB', il faut que la

force R soit égale au côté AD' ; car si elle était ou plus grande ou plus petite, en construisant un parallélogramme sur cette force et sur le côté AC, sa diagonale ne coïnciderait pas avec AB'. Ainsi l'on a $R=AD'$; mais $AD'=B'C=AD$; par conséquent $R=AD$, et la résultante des deux forces AB et AC est représentée, en grandeur comme en direction, par la diagonale AD.

Je rappellerai ici plusieurs conséquences immédiates de ce théorème, qui vont bientôt nous être utiles. Il s'ensuit d'abord que la résultante est à l'une des deux composantes, comme le sinus de l'angle compris entre les deux composantes, est au sinus de l'angle compris entre la résultante et l'autre composante. Ainsi, en comparant la résultante AD à la composante AB, on a

$$AD : AB :: \sin.BAC : \sin.DAC.$$

Les deux composantes AB et AC sont réciproquement proportionnelles aux sinus des angles que font leurs directions avec celle de la résultante, c'est-à-dire, que l'on a

$$AC : AB :: \sin.DAB : \sin.DAC.$$

On peut aussi dire que ces deux forces sont réciproquement proportionnelles aux perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la résultante sur leurs directions; de manière qu'en abaissant du point D, les perpendiculaires Db et Dc, sur les droites AB et AC, prolongées s'il est nécessaire, on aura

$$AC : AB :: Db : Dc.$$

Cette proportion se déduit de la précédente, en multipliant les deux derniers termes par AD, et observant que

$$AD.\sin.DAB=Db \text{ et } AD.\sin.DAC=Dc.$$

Des Cordes.

Une *machine* est en général un instrument au moyen duquel une force agit sur des points qui sont hors de sa direction,

et exerce sur ces points un plus grand ou un plus petit effort que si elle y était immédiatement appliquée. Dans ce sens, une corde attachée par une de ses extrémités à un mobile, et tirée suivant sa longueur, par une force appliquée à son autre extrémité, ne peut être considérée comme une machine, puisqu'elle ne change en rien l'action de cette force sur le mobile (n° 28); mais si la corde ABC (fig. 70) est attachée à un corps par son extrémité A, et à un point fixe, par son extrémité C; et qu'en même tems une force donnée P, soit appliquée au point B de cette corde, suivant une direction BD, aussi donnée, cette force agira alors sur le point A, qui se trouve hors de sa direction, suivant la direction AB, avec une intensité différente de la sienne, et quelquefois beaucoup plus grande; donc, au moyen du point fixe C, la corde ABC devient une véritable machine.

Pour connaître dans ce cas la force qui agit suivant AB sur le corps auquel la corde est attachée en A, je prolonge les droites CB et AB, puis je décompose la force P suivant leurs prolongemens BC' et BA' : la composante dirigée suivant BC', est détruite par la résistance du point C, qui se trouve sur sa direction; l'autre, qui agit suivant BA' et qu'on peut transporter au point A de sa direction, est la force demandée. Or, en appelant P' cette force, et la comparant à la résultante P, on aura

$$P' : P :: \sin.C'BD : \sin.CBA';$$

d'où l'on conclut

$$P' = \frac{P \sin.CBD}{\sin.CBA},$$

en observant que $C'BA' = CBA$, et $\sin.C'BD = \sin.CBD$, parce que les angles $C'BD$ et ABD sont supplémens.

Lorsque la corde ABC sera peu infléchie au point A, c'est-à-dire, lorsque l'angle ABC sera très-peu différent de deux droits, son sinus sera très-petit, et la force P', très-grande par rapport à la force P. Si les deux extrémités de cette

corde étaient attachées à des points fixes, les deux composantes de la force P exprimeraient les pressions que ces points éprouvent, ou les tensions des cordons BA et BC qui y aboutissent. Ces deux tensions devraient être égales, et l'angle ABC, coupé en deux parties égales par la direction de la force P, si cette force était appliquée à un anneau mobile qui pût glisser le long du cordon ABC.

D'après tous les détails où nous sommes entrés dans le sixième chapitre du premier livre, sur les conditions d'équilibre du *polygone funiculaire*, sur sa construction et sur le calcul des tensions de ses différens côtés, il ne nous reste rien à ajouter à la théorie élémentaire de l'équilibre des forces qui agissent par l'intermédiaire de cordes inextensibles et parfaitement flexibles, ou qu'on regarde comme telles.

Du Levier.

Une barre inflexible BAC, droite ou courbe (fig. 71 et 72), retenue par un point fixe A, forme ce qu'on appelle un *levier*. Le point fixe se nomme le *point d'appui*. Si le levier est droit, et que les forces qui lui sont appliquées soient parallèles, les parties comprises entre le point d'appui et le point d'application des forces, se nomment les *bras de levier de ces forces*. Dans le levier en particulier, et généralement dans toute espèce de machine où l'on a pour objet de tenir en équilibre ou de mouvoir une certaine force au moyen d'une autre, on appelle *résistance*, la force qu'il faut équilibrer ou mouvoir, et *puissance* la force dont on dispose pour cet objet.

Nous considérerons d'abord le levier droit (fig. 71); nous désignerons la puissance par P, la résistance par Q, et nous supposerons la première appliquée au point B, et la seconde, au point C, suivant les directions parallèles BE et CF. De cette manière, AB sera le bras de levier de la puissance, et AC, celui de la résistance: or, pour l'équilibre de ces deux forces, il est nécessaire et il suffit que leur résultante vienne passer par le point d'appui A; mais la résultante de ces forces parallèles

coupe la droite qui joint leurs points d'application, en parties réciproquement proportionnelles à ces forces; la droite BC doit donc être partagée de cette manière au point A, de sorte qu'on ait la proportion

$$P : Q :: AC : BA,$$

qui nous montre que dans le cas de l'équilibre, la *puissance et la résistance sont en raison inverse de leur bras de levier*.

La charge que supporte le point d'appui, et à laquelle il doit être capable de résister, est exprimée par la résultante des deux forces P et Q; cette charge est donc égale à la somme $P+Q$, quand les forces P et Q agissent dans le même sens, comme le suppose la figure; au contraire, elle est égale à l'excès de la plus grande sur la plus petite, lorsque les forces P et Q sont dirigées en sens contraire l'une de l'autre; ce qui aurait lieu, par exemple, si la force P était appliquée au point B' suivant la direction $B'E'$, la force Q conservant toujours sa direction CF.

En ayant égard à la position du point d'appui, par rapport aux points d'application de la puissance et de la résistance, on distingue trois genres de leviers droits. Le levier du premier genre a lieu quand le point d'appui est placé entre les trois points d'application des deux forces; celui du second genre, quand la résistance tombe entre le point d'appui et la puissance; enfin, le levier est du troisième genre, lorsque c'est la puissance qui tombe entre le point d'appui et la résistance.

La *balance* ordinaire est un levier du premier genre à bras égaux, ou qui doivent être tels, pour que cet instrument soit exact. Pour s'assurer de l'exactitude d'une balance, il n'y a qu'à voir si deux poids qui se font équilibre, en les plaçant dans ses plateaux, continuent encore de se faire équilibre, lorsqu'on fait passer chaque poids d'un plateau dans l'autre : la balance n'est point exacte, si l'équilibre n'a pas lieu dans ces deux cas; mais alors même, on peut encore s'en servir, pour peser les corps par

un

un moyen fort simple, qui rend la *pesée* indépendante de l'exactitude de la balance. Pour expliquer cet artifice, j'appelle A et B les deux plateaux ; je suppose qu'on place dans le plateau A, un corps dont le poids est inconnu ; soit X ce poids ; plaçons dans le plateau B un poids P qui fasse équilibre au poids X ; on ne pourra pas conclure $P = X$, sans être certain de l'exactitude de la balance ; mais si l'on retire du plateau A le corps qu'on veut peser, et qu'on le remplace par un poids P' qui fasse équilibre au poids P, resté dans le plateau B, on aura rigoureusement $X = P'$; car les deux poids X et P', faisant équilibre dans les mêmes circonstances à un même poids P, doivent être égaux entre eux, quoique, ni le poids P', ni le poids X, ne soit égal au poids P.

Lorsque le levier n'est pas droit (fig. 72), la condition d'équilibre des forces qui lui sont appliquées consiste toujours en ce que leur résultante doit venir passer par le point d'appui. Supposant donc la force P, appliquée au point B suivant la direction BE, et la force Q au point C suivant la direction CF, dans le même plan que la première, il faudra que le point A se trouve sur la direction de leur résultante ; par conséquent en abaissant du point A sur les droites BE et CF, des perpendiculaires Ab et Ac, on aura

$$P : Q :: Ac : Ab ;$$

où l'on voit que dans l'équilibre d'un levier quelconque, *la puissance et la résistance sont en raison inverse des perpendiculaires abaissées du point d'appui sur leurs directions*. La charge du point d'appui est exprimée par la résultante de ces deux forces.

Quelle que soit la forme du levier, on peut toujours le remplacer mentalement par un levier coudé bAc, formé par les deux perpendiculaires abaissées du point d'appui sur les directions des forces ; en prenant les points b et c, où ces perpendiculaires viennent tomber, pour les points d'application des forces, les bras de levier seront ces perpendiculaires elles-mêmes, et l'on pourra toujours dire que les deux forces qui

se font équilibre, sont réciproquement proportionnelles à leurs bras de levier.

Il était bon de développer le cas particulier d'un levier sollicité par deux forces seulement, parce que c'est le cas qui se présente le plus souvent dans la pratique. Quant à l'équilibre d'un levier sollicité par trois ou un plus grand nombre de forces, je renvoie au n° 57, où j'ai donné la condition générale de cet équilibre, telle qu'on l'énonce ordinairement. On peut, si l'on veut, comprendre parmi ces forces le poids même du levier, qu'on regardera comme une force verticale appliquée à son centre de gravité.

De la Poulie et des Moufles.

La *poulie* est une roue circulaire $BHCG$ (fig. 73), creusée en gorge sur sa circonférence, et traversée à son centre A par un axe autour duquel elle peut tourner dans une chape AK. Ce mouvement est le seul qu'elle puisse prendre, quand l'axe est retenu fixement; alors cette machine s'appelle une *poulie fixe;* c'est au contraire une *poulie mobile*, quand l'axe est libre et que la poulie n'est retenue par aucun autre point. Occupons-nous d'abord de la poulie fixe.

Supposons qu'une corde parfaitement flexible $EBHCF$ soit passée dans la gorge de la poulie, et embrasse un arc BHC de sa circonférence; appliquons aux extrémités E et F de cette corde, des forces P et Q, qui agiront suivant les directions BE et CF, tangentes à la poulie aux points B et C; en faisant abstraction du frottement de la corde contre la gorge de la poulie, il est évident qu'il faudra pour l'équilibre, que l'on ait $P=Q$, car si ces forces étaient inégales, la corde glisserait dans le sens de la plus grande. D'ailleurs, on parvient aussi à cette conclusion, en cherchant la condition nécessaire pour que la résultante des forces P et Q vienne passer par le point fixe A; et en déterminant la grandeur de cette résultante, on aura l'avantage de connaître la pression que ce point supporte.

Prolongeons donc les tangentes EB et FC, jusqu'à ce qu'elles

se coupent en un point D; transportons les forces P et Q au point D, commun à leurs directions; leur résultante passera par ce point; mais comme le centre A de la poulie est le seul point fixe qui existe dans la machine, il faudra qu'elle passe aussi par le point A, pour qu'elle puisse être détruite; cette force devra donc être dirigée suivant DA; or, la droite AD coupe en deux parties égales l'angle EDF des deux composantes; donc il faut que l'on ait $P=Q$, sans quoi la direction de la résultante ne coïnciderait pas avec la droite AD. Cela posé, si l'on prend sur les directions DE et DF des parties égales Db et Dc, pour représenter les composantes, et que l'on achève le losange $Dbca$, la résultante sera représentée par la diagonale Da, et elle exprimera la pression qu'éprouve le point fixe A. En appelant donc X, cette pression, on aura

$$X : P :: Da : Db;$$

mais les deux triangles isocèles Dba et BAC sont semblables, parce que les angles A et b compris entre les côtés égaux, sont égaux, comme étant tous les deux supplémens d'un même angle BDC; cela est évident pour l'angle Dba, et dans le quadrilatère $ABDC$, les deux angles B et C étant droits, la somme des deux autres A et D doit être égale à 200°, puisque la somme des quatre vaut quatre angles droits: ainsi nous aurons la proportion

$$Da : Db :: BC : AB;$$

et par conséquent,

$$X : P :: BC : AB.$$

Donc l'une des deux forces égales appliquées à la poulie fixe, étant représentée par le rayon AB, la pression que son centre éprouve est représentée par la *sous-tendante* BC de l'arc BHC embrassé par la corde. Cette pression est la plus grande lorsque les deux forces sont parallèles; la corde embrasse alors la demi-circonférence de la poulie, la sous-tendante devient le diamètre, et la pression se trouve double de l'une des deux forces, ou égale à leur somme.

La poulie fixe offre le moyen de changer la direction d'une force, sans augmenter ni diminuer son intensité; par exemple, que la corde *EHF* soit attachée à un mobile par son extrémité *F*, et que la force *P* soit toujours appliquée à l'autre extrémité *E*, suivant la direction *BF*; par l'intermédiaire de la poulie fixe *BHCG*, la force *P* agira sur le mobile suivant la direction *FC*; mais l'effort qu'elle exercera sur ce corps, ne sera ni plus grand, ni plus petit que si elle était immédiatement appliquée au point *F*, suivant cette direction *FC*. Il n'en est pas de même, comme on va le voir, dans le cas de la poulie mobile.

Maintenant, le centre *A* (fig. 74) est entièrement libre; la corde *EBHCF* est attachée par son extrémité *F*, à un point fixe; on applique à l'autre extrémité *E*, suivant la direction *BE*, une force donnée *P*, et l'on suspend à l'extrémité *K* de la chape, au poids *R* que je regarde comme la résistance, et qui est tenu en équilibre par la puissance *P*. Dans cet état le point *F* supporte une pression dirigée suivant *FC*; en appliquant à ce point une force *Q*, égale à cette pression, inconnue et dirigée en sens contraire, ou suivant *CF*, on pourra ensuite considérer le point *F* comme un point libre; et alors la condition d'équilibre de la machine se réduit à ce que la résultante des deux forces *P* et *Q* soit égale et contraire à la force *R*. Or, pour cela, il faut d'abord que cette résultante passe par le centre *A*, ce qui exige, comme on vient de le voir, qu'on ait $P = Q$; il faut, de plus, que la droite *DA*, direction de la résultante de *P* et *Q*, coïncide avec la droite *AK*, direction de la force *R*; donc cette droite *AK* doit couper en deux parties égales, l'angle *EDF* des deux tangentes *EB* et *FC* prolongées; enfin, en comparant la force *R* à l'une des deux forces *P* ou *Q*, il faudra, d'après ce qu'on vient de prouver, qu'on ait

$$R : P :: BC : AB;$$

donc dans l'équilibre de la poulie mobile, *la puissance est à la résistance comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde.*

Le cas le plus favorable à la puissance a lieu quand les cordons BE et CF sont parallèles ; on a alors $R = 2P$, de manière qu'une force donnée P fait, dans ce cas, équilibre à une force double R. Si l'arc BHC était le sixième de la circonférence, on aurait $BC = AB$, et la puissance P serait égale à la résistance R ; si cet arc devient plus petit qu'un sixième, la force P sera plus grande que la force R, de manière que la machine sera défavorable à la puissance. Généralement la force P, dirigée suivant BE, équivaudra, au moyen de la poulie $BHCG$, à une force $P.\frac{BC}{AB}$, dirigée suivant KA. Dans tous les cas, la pression qu'éprouve le point fixe F, ou, ce qui est la même chose, la tension du cordon CF, est égale à la force P.

Connaissant le rapport de la puissance à la résistance dans la poulie mobile et dans la poulie fixe, il est aisé de trouver ce rapport, dans une combinaison quelconque de ces deux genres de poulies. Par exemple, attachons à l'extrémité K de la chape d'une première poulie mobile $BHCG$ (fig. 75), une corde $KB'H'C'F'$, qui passe ensuite dans la gorge d'une seconde poulie mobile $B'H'C'G'$ et qui aille se nouer au point fixe F'; attachons de même à l'extrémité de cette seconde poulie, une corde $K'B''H''C''F''$, qui passe sur une troisième poulie mobile $B''H''C''G''$, pour aller se nouer au point fixe F'' ; enfin, suspendons à la chape $A''K''$ de cette troisième poulie, un poids R, et considérons ce poids comme la résistance qui est tenue en équilibre par une puissance P, appliquée à la première poulie suivant la direction BE. Cette force P, d'après ce qu'on vient de voir, équivaut à une force dirigée suivant $B'K'$ et égale à $P.\frac{BC}{AB}$; celle-ci, par la même raison, équivaut à une force dirigée suivant $B''K''$, et égale à $P.\frac{BC}{AB}.\frac{B'C'}{A'B'}$, laquelle est de même équivalente à une force égale à $P.\frac{BC}{AB}.\frac{B'C'}{A'B'}.\frac{B''C''}{A''B''}$, et dirigée suivant $K''A''$; donc pour l'équilibre des deux forces P et R, il faut qu'on ait

$$R = P \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{B'C'}{A'B'} \cdot \frac{B''C''}{A''B''};$$

d'où l'on conclut que la puissance P est à la résistance R, comme le produit des rayons AB, $A'B'$, $A''B''$ des trois poulies, est au produit des sous-tendantes BC, $B'C'$, $B''C''$. Les pressions des points fixes F, F', F'', ou les tensions des cordes qui viennent s'y attacher, sont exprimées par P, pour le point F, par $P.\frac{BC}{AB}$, pour le point F', et enfin, par $P.\frac{BC}{AB}.\frac{B'C'}{A'B'}$, pour le point F''.

Ces résultats peuvent s'étendre à un nombre quelconque de poulies mobiles, arrangées de la même manière. Il s'ensuit, comme cas particulier, que si tous les cordons qui aboutissent à ces poulies, sont parallèles, la puissance sera à la résistance, comme l'unité est au nombre 2^n; n désignant le nombre des poulies mobiles. Dans la figure 76, on a trois poulies mobiles à cordons parallèles; le poids R est suspendu à la chape de la troisième; le poids P est suspendu à la corde $PLMEB$ qui passe sur une poulie fixe LME, dont l'intermédiaire ne change rien à l'intensité de la puissance P; de sorte que cette force produit le même effet qne si elle agissait immédiatement suivant la direction BE : le rapport des deux forces P et R, dans le cas d'équilibre, sera donc $F = P.2^3 = 8.P$; c'est-à-dire, qu'au moyen d'une pareille machine, nn poids quelconque P peut tenir en équilibre un poids R hnit fois aussi grand. Les pressions que supportent les points fixes F, F', F'', ou les tensions des cordes qui s'y attachent, sont différentes : celle du point F est égale à P; celle du point R', à $2P$; celle du point F'', à $4P$. Le centre O de la poulie fixe éprouve une pression égale au double de la force P; la somme des pressions qui ont lieu sur les quatre points fixes O, F, F', F'', est égale à $9P$, ou à la somme $P + R$ des deux poids suspendus à la machine; et, comme on voit, cette pression totale se distribue inégalement et d'une manière déterminée, entre les quatre points fixes qui sont dans la machine.

Un assemblage quelconque de poulies fixes ou mobiles,

forme ce qu'on nomme, en général, une *moufle*. Celle qui est représentée dans la figure 76, est la plus avantageuse à la puissance, c'est-à-dire, que c'est en disposant de cette manière un nombre donné de poulies, qu'une puissance aussi donnée fera équilibre à une plus grande résistance. Mais comme les machines n'ont pas seulement pour objet de tenir des forces en équilibre au moyen d'autres forces, on emploie souvent des moufles disposées d'une autre manière, qu'on juge plus appropriée à l'usage qu'on en veut faire. On aura à calculer, dans chaque espèce de moufle, le rapport de la puissance à la résistance, nécessaire à l'équilibre; ce calcul, d'après ce qui précède et d'après l'exemple que nous allons encore en donner, ne présentera jamais de grandes difficultés.

La moufle représentée par la figure 77 est formée de trois poulies fixes assemblées dans une chape OV, et d'un pareil nombre de poulies mobiles assemblées dans une autre chape AK; une même corde embrasse toutes ces poulies, en passant alternativement d'une poulie fixe à une poulie mobile; toutes les parties EB, FC, $E'B'$, $F'C'$, $E''B''$, $F''C''$ de cette corde, qui vont d'une poulie à l'autre, sont parallèles. Cette corde est attachée par son extrémité F'' à la chape des poulies fixes, un poids donné P est suspendu à son autre extrémité, un poids R est pareillement attaché à la chape des poulies mobiles, et dans ce poids R, doit être compris le poids des poulies mobiles, de leur chape et des cordes qui les lient aux poulies fixes : le poids P est regardé comme la puissance, le poids R comme la résistance, et l'on demande le rapport de ces deux forces dans le cas de l'équilibre.

Puisque les cordons EB, FC, etc., font parties d'une même corde, ils doivent tous éprouver la même tension dans le sens de leur longueur, car il est impossible qu'une corde soit inégalement tendue dans ses différentes parties. Si donc on décompose la force R, en autant de forces parallèles et égales qu'il y a de cordons employés à soutenir ce poids, c'est-à-dire, en six forces dirigées suivant les cordons EB, FC, $E'B'$, $F'C'$, $E''B''$, $F''C''$, ces composantes égales exprimeront les tensions

de ces cordons. Ainsi, chacun de ces six cordons est tiré dans le sens de la pesanteur par une force égale à $\frac{1}{6}.R$; de sorte que le cordon EC est dans le même cas que si l'on suspendait à son extrémité inférieure un poids égal à $\frac{1}{6}.R$; or, le même cordon est tiré en sens contraire par la force P; on a donc, pour l'équilibre, $P=\frac{1}{6}.R$, ou $R=6.P$. Par conséquent, dans la moufle que nous considérons, la puissance P fait équilibre à une résistance égale à $6.P$. Il est aisé de voir que dans toute autre moufle disposée de la même manière, et ne différant de celle-ci que par le nombre des poulies, la puissance est à la résistance, dans le cas de l'équilibre, comme l'unité est au nombre des cordons qui aboutissent aux poulies mobiles et qu'on peut regarder comme employés à soutenir la résistance.

Du Treuil et des Roues dentées.

On appelle indifféremment *treuil*, *tour* ou *cabestan*, une machine représentée par la figure 78, et qui consiste en un cylindre d'un diamètre quelconque, auquel est attachée fixement une roue d'un plus grand diamètre, dont le centre est dans l'axe du cylindre, et le plan, perpendiculaire à cet axe. Le cylindre est terminé à ses extrémités par deux autres cylindres d'un plus petit diamètre qu'on appelle les *tourillons;* ceux-ci sont enchâssés dans des appuis fixes, qui permettent au treuil de tourner librement autour de son axe, et l'empêchent de prendre aucun autre mouvement. Une corde s'enroule sur le cylindre, elle y est fixement attachée par une de ses extrémités, et c'est à son autre extrémité que la résistance est appliquée. Quant à la puissance, elle agit en un point quelconque de la roue, tangentiellement à sa circonférence.

Pour fixer les idées, nous supposerons que l'axe $AKOB$ du treuil est horizontal, et que la résistance est un poids R suspendu à l'extrémité de la corde ER, qui se détache du cylindre au point E et qui lui est tangente en ce point; la puissance sera une force P, appliquée au point M de la roue

suivant la tangente MC. Le centre de la roue est le point O où son plan coupe l'axe du cylindre ; la droite OM est donc un rayon qui aboutit au point de contact, et qui est par conséquent perpendiculaire à la tangente MC; enfin les appuis fixes qui contiennent les tourillons, sont deux piliers verticaux AA' et BB'. Cela posé, cherchons le rapport des deux forces P et R dans le cas de l'équilibre, et la pression que supporte chacun des deux appuis.

Je mène par le point E un plan perpendiculaire à l'axe $AKOB$ qui coupe cette droite au point K; le rayon KE du cylindre sera perpendiculaire à la verticale ER, puisque cette ligne touche le treuil au point E; ce rayon sera donc horizontal. Par le point O, où le plan de la roue coupe l'axe $AKOB$, je mène un second rayon OF, du cylindre, parallèle à KE et dirigé en sens contraire, de manière que le point E étant en arrière de l'axe, le point F soit en avant; le rayon horizontal OF sera compris dans le plan de la roue; à son extrémité F j'applique deux forces, dirigées en sens contraires suivant la verticale GFH, et que je prends l'une et l'autre égales à la force R; pour distinguer ces forces, j'appellerai R' celle qui agit suivant FG, et R'' celle qui agit suivant FH; et il faudra se rappeler qu'on a $R'' = R' = R$. L'addition de ces deux forces égales et directement contraires, est permise et ne change rien à l'état de la question; mais si l'on tire la droite EF, elle rencontrera l'axe du cylindre en un point D, qui la partagera en deux parties égales et qui sera aussi le milieu de OK; la résultante des deux forces R et R' parallèles et égales, sera donc équivalente à un poids égal à $2R$ et suspendu au point D; cette force sera détruite, puisque tous les points de l'axe du cylindre sont immobiles; par conséquent il ne restera plus que les deux forces R'' et P; or, en observant que le point O est fixe, on peut considérer les forces R'' et P, comme appliquées aux extrémités d'un levier coudé FOM, suivant des directions FH et MC, perpendiculaires aux bras de ce levier; donc, pour l'équilibre, il est nécessaire et il suffit que ces forces soient en raison

inverse de leurs bras de levier FO et MO; ainsi, à cause de $FO = EK$ et de $R'' = R$, on aura

$$P : R :: EK : OM.$$

Nous voyons donc que dans l'équilibre du treuil, *la puissance est à la résistance comme le rayon du cylindre est à celui de la roue.*

Quelquefois la puissance, au lieu d'être appliquée à une roue, agit à l'extrémité d'une manivelle; mais pourvu que sa direction soit toujours perpendiculaire au rayon, le même rapport subsistera entre la puissance et la résistance, en remplaçant le rayon de la roue par celui de la manivelle.

On doit aussi observer que si la corde qui s'enroule sur le cylindre a un diamètre sensible, il faudra, pour plus d'exactitude, regarder la puissance comme agissant suivant l'axe de la corde, et augmenter le rayon du cylindre d'une quantité égale au rayon de cette corde, ce qui diminuera un peu l'avantage de la puissance sur la résistance.

Maintenant pour déterminer les pressions qui ont lieu aux deux extrémités A et B de l'axe fixe $ADOB$, et qui sont dues aux deux forces données R et P, j'observe d'abord que la force R vient d'être remplacée par un poids $2R$ suspendu au point D, et une force R'', égale à R, agissant au point F en sens contraire de la pesanteur; d'ailleurs la résultante des forces P et R'' devant passer par le point O, il est permis de les transporter en ce point, parallèlement à leurs directions; de sorte qu'en menant par le point O, les droites OC' et OH', parallèles à MC et FH, on peut supposer que la force P agit suivant OC', et la force R'', ou R, suivant OH'. De cette manière, au lieu des deux forces données P et R, qui étaient appliquées aux points M et F, nous aurons trois forces $2R$, P et R appliquées aux deux points D et O de l'axe fixe; donc il ne s'agit plus que de décomposer chacune de ces trois forces en deux autres, parallèles à sa direction, et passant par les points A et B; réduisant ensuite en une seule, les trois composantes relatives à chacun de ces points, on aura en grandeur

et en direction, la pression qu'il supporte. Cette pression sera verticale pour l'un et l'autre point, si la force donnée P est un poids; dans ce cas, la droite MC et sa parallèle OC' seront verticales; les deux forces R et P, appliquées au point O, se réduiront à une seule force $R-P$, dirigée suivant OH'; et la pression en chacun des deux points A et B, sera égale à la composante de la force $2R$, moins la composante de la force $R-P$, relative à ce point. Je vais achever le calcul des pressions dans cette hypothèse.

Soit a la longueur AB du cylindre; b la distance OB du centre de la roue au point B; x la distance KB du point d'application de la résistance R au même point B, laquelle distance peut varier pour un même treuil; nous aurons $KO=x-b$, $OD=\frac{1}{2}.x-\frac{1}{2}b$, $BD=\frac{1}{2}x.+\frac{1}{2}b$, et $AD=a-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}b$. Appelons, pour un moment, U et V, les composantes de la force $2R$, parallèles à sa direction, et passant, la première, par le point A, et la seconde par le point B, nous aurons (n° 32),

$$U:2R::DB:AB,$$
$$V:2R::DA:AB;$$

d'où l'on tire, en mettant pour DB et DA, leurs valeurs,

$$U=\frac{R(b+x)}{a}, \qquad V=\frac{R(2a-b-x)}{a};$$

de même U' et V' étant les composantes de la force $R-P$, appliquées aux mêmes points A et B, on aura

$$U'=\frac{(R-P)b}{a}, \qquad V'=\frac{(R-P)(a-b)}{a};$$

donc en désignant par X et Y les pressions verticales qu'éprouvent les appuis fixes AA' et BB', nous aurons d'abord $X=U-U'$ et $Y=V-V'$; mettant pour U, U', V, V', leurs valeurs, et réduisant, il vient

$$X=\frac{Rx+Pb}{a}, \qquad Y=\frac{R(a-x)+P(a-b)}{a}.$$

Si l'on veut avoir égard aux pressions dues aux poids du cylindre et de la roue, il faudra considérer le poids du cylindre comme une force verticale appliquée au milieu de la droite AB, centre de gravité de ce corps, et le poids de la roue, comme une force verticale appliquée au point O. Appelant donc P' et P'' ces deux poids, et décomposant chacune de ces forces en deux autres, appliquées aux points A et B, on trouvera que la valeur de X doit être augmentée de $\frac{1}{2}.P' + \frac{P''b}{a}$, et celle de Y, de $\frac{1}{2}.P' + \frac{P''(a-b)}{a}$; par conséquent les valeurs complètes de X et Y, seront

$$X = \frac{Rx + (P + P'')b}{a} + \tfrac{1}{2}.P',$$

$$Y = \frac{R(a-x) + (P + P'')(a-b)}{a} + \tfrac{1}{2}.P'.$$

On peut augmenter autant qu'on voudra l'avantage de la puissance sur la résistance dans le treuil, en faisant croître le rayon de la roue sans toucher à celui du cylindre. On produira encore le même effet en employant deux ou un plus grand nombre de treuils, liés entre eux par des cordes qui aillent de la roue de l'un au cylindre de l'autre. Dans ce cas, la puissance sera à la résistance qu'elle tient en équilibre, comme le produit des rayons de tous les cylindres est au produit des rayons de toutes les roues. Supposons, par exemple, que la corde MC (fig. 79), tangente en M à la roue d'un premier treuil, va s'enrouler sur le cylindre d'un second treuil dont l'axe est parallèle à celui du premier; qu'à la roue de ce second treuil est attachée une corde $M'C'$, qui la touche au point M', et qui va ensuite s'enrouler sur le cylindre d'un troisième treuil dont l'axe est aussi parallèle aux axes des deux premiers; enfin, qu'une force donnée P est appliquée à la roue du troisième treuil, suivant la droite $M''C''$, tangente à la circonférence, et qu'un poids R est suspendu à une corde enroulée sur le cylindre du premier treuil : je dis que pour l'équilibre de ces deux forces, on aura

$$P : R :: KE.K'C.K''C'' : OM.O'M'.O''M'';$$

OM, $O'M'$, $O''M''$, étant les rayons des trois roues, et KE, $K'C$, $K''C'$, ceux des trois cylindres.

En effet, la force P appliquée au troisième treuil, ferait équilibre à une force P', appliquée au point C' du cylindre suivant la direction $C'M'$, et déterminée par cette proportion

$$P : P' :: K''C' : O''M'' ;$$

la force P est donc équivalente à une force égale et contraire à P', et qu'on peut regarder comme agissant au point M' suivant la direction $M'C'$. Par la meme raison cette force P' est équivalente à une force P'', agissant au point M, dirigée suivant la droite MC, et déterminée en grandeur par cette proportion

$$P' : P'' :: K'C : O'M' ;$$

mais pour l'équilibre des deux forces P'' et R, appliquées à la roue et au cylindre d'un même treuil, il faut qu'on ait

$$P'' : R :: KE : OM ;$$

or, en multipliant ces trois proportions terme à terme, il en résultera le rapport que nous avons annoncé entre la puissance P et la résistance R.

Les forces intermédiaires P' et P'' expriment les tensions des cordes $C'M'$ et CM qui lient le second treuil au troisième et au premier. Les pressions que supportent les appuis de chaque treuil, sont dues à son poids, aux forces qui lui sont directement appliquées, et aux tensions des cordes qui l'attachent aux autres treuils. Ainsi, relativement au premier treuil, les pressions sont dues à son poids, au poids R, et à la force P' dirigée suivant MC, du point M vers le point C; par rapport au second treuil, elles sont produites par son poids, la force P' agissant suivant CM, du point C vers le point M, et la force P'' dirigée suivant $M'C'$; enfin, les pressions qui ont lieu sur les appuis du troisième treuil, sont dues aux poids du cylindre et de la roue de ce treuil, à la force P'' agissant suivant $C'M'$, de C' vers M', et à la puissance

P dirigée suivant $M''C''$. Connaissant les forces qui produisent les charges des appuis dans chaque treuil, on les déterminera par le moyen que nous venons d'indiquer, en considérant le treuil représenté par la figure 78.

Au lieu d'employer des cordes pour lier entre eux plusieurs treuils que l'on veut réunir, on fait souvent usage d'un autre moyen qui ne change rien au rapport de la puissance à la résistance. On pratique à la circonférence de chaque roue, des dents saillantes également espacées, et à la surface de chaque cylindre, des rainures creuses espacées de la même manière; on rapproche ensuite, et on dispose les treuils de telle manière que les dents des roues engrènent dans les rainures des cylindres, et qu'en faisant tourner l'un des treuils sur son axe, tous les autres soient en même tems mis en mouvement par cet engrenage; les roues se nomment alors des *roues dentées*, et les cylindres, des *pignons*.

Les figures 80 et 81 représentent deux systèmes de roues dentées, dont chacune est composée de trois roues et d'autant de pignons. Dans la première figure, les axes des trois pignons sont parallèles; dans la seconde, l'axe du second pignon est perpendiculaire aux axes des deux autres; le plan de chaque roue est toujours perpendiculaire à l'axe de son pignon. La direction des axes les uns par rapport aux autres, dépend de la disposition qu'on donne aux dents des roues: dans la figure 80, ces dents sont les prolongemens des rayons des roues, et dans la figure 81, elles sont perpendiculaires à ces rayons. Mais quelsque soient le nombre des roues et la disposition des axes, il faudra toujours considérer un système de roues dentées, comme un assemblage de treuils, et en conclure que, dans une machine de cette espèce, la *puissance est à la résistance, comme le produit des rayons des pignons est le produit des rayons des roues*.

Le *cric* est encore une machine qui se rapporte au treuil et qui n'en diffère pas essentiellement. Il consiste en une barre AB (fig. 82), garnie de dents à l'une de ses faces et mobile dans le sens de sa longueur; les dents de cette barre engrè-

nent avec celles d'un pignon E, que l'on fait tourner sur son axe, au moyen d'une manivelle OM; les dents du pignon entraînent celles de la barre et font monter un poids posé sur la tête A de cette barre, ou suspendu à son extrémité inférieure B: ce poids est la résistance; la puissance est appliquée à l'extrémité M de la manivelle, et en supposant sa direction MC tangente à la circonférence que décrit cette extrémité, il faut, pour l'équilibre, que la puissance soit à la résistance comme le rayon du pignon est au rayon de la manivelle.

Du Plan incliné et de la Vis.

On emploie ordinairement le *plan incliné* à tenir en équilibre un corps pesant, au moyen d'une force dont la direction n'est pas verticale. Nous avons considéré cet équilibre (nos 97 et 98) d'une manière directe et élémentaire, qui ne nous laisse rien à ajouter maintenant. Nous avons vu qu'il faut d'abord que la direction de la force connue soit comprise dans le plan vertical mené par le centre de gravité du corps; la droite KE (fig. 23) étant cette direction, et K le point où elle coupe la verticale KF, menée par le centre de gravité, il faut en outre que la perpendculaire KD abaissée du point K sur le plan incliné, tombe en dedans de la base du corps; cela étant, il est nécessaire et il suffit pour l'équilibre que la résultante du poids du corps et de la force donnée, soit dirigée suivant la perpendiculaire KD: cette résultante, ainsi dirigée, sera détruite par la résistance du plan qu'on suppose fixe, et elle exprimera la pression qu'il éprouve. De cette dernière condition on conclut qu'en appelant P, la résistance ou le poids du corps dirigé suivant la verticale KF, et Q, la force qui agit suivant KE, on aura

$$Q : P :: \sin. FKD : \sin. EKD ;$$

proportion qu'on change facilement en celle-ci:

$$Q : P :: BC : AB . \sin. EKD ;$$

AB étant la longueur, et BC, la hauteur du plan incliné (n° 98).

Cette proportion renferme le rapport de la puissance Q à la résistance P, dans l'équilibre du plan incliné. Si la puissance est parallèle à la longueur du plan, la droite DK est à-la-fois perpendiculaire à AB et à KE; on aura donc $\sin . EKD = 1$, et

$$Q : P :: BC : AB;$$

la puissance est alors plus petite que la résistance, et c'est le cas qui lui est le plus favorable. Si la force Q est parallèle à la base AC du plan incliné, l'angle EKD sera complément de l'angle BAC et égal à l'angle ABC; on aura donc

$$\sin . EKD = \sin . ABC = \frac{AC}{AB};$$

et par conséquent

$$Q : P :: BC : AC;$$

donc, dans ce cas, *la puissance est à la résistance comme la hauteur du plan incliné est à sa base.* La machine est alors favorable ou défavorable à la puissance, selon qu'on a $BC < AC$, ou $BC > AC$, c'est-à-dire, selon que l'angle BAC, qui mesure l'inclinaison du plan, est plus petit ou plus grand que la moitié d'un angle droit.

Quoique la *vis* soit rangée communément parmi les machines simples, elle peut cependant être considérée comme une machine composée qui se rapporte, comme on va le voir, au treuil et au plan incliné. La vis est un cylindre AB (fig. 83) revêtu d'un *filet* saillant CMD, adhérent à sa surface et dont nous expliquerons tout-à-l'heure la génération. On appelle *écrou* la pièce EF, dans laquelle on fait entrer la vis; une *rainure* creuse, semblable au filet CMD, est pratiquée dans la concavité de l'écrou; quand la vis est entrée dans l'écrou, cette rainure est exactement remplie par le filet, de telle sorte que la vis ne peut plus prendre d'autre mouvement que de s'avancer dans le sens de sa longueur, en tournant sur elle-

elle-même. Quelquefois la vis est fixe, et c'est l'écrou qui s'avance le long de la vis, en tournant autour de son axe; d'autres fois l'écrou est fixe, et la vis se meut dans l'écrou; mais comme ces deux cas reviennent au même pour l'équilibre des forces appliquées à la pièce mobile, nous nous bornerons à considérer le premier. De plus, pour fixer les idées, nous placerons le cylindre fixe AB dans une position verticale; le poids seul de l'écrou mobile suffira alors pour le faire descendre le long de la vis, en faisant toutefois abstraction du frottement de cet écrou contre la vis. Nous représenterons par P la force qu'on applique à l'écrou pour le tenir en équilibre, et nous supposerons que cette force agit à l'extrémité d'une barre EG, suivant une direction horizontale GH. La force P sera la puissance; le poids de l'écrou augmenté, si l'on veut, d'un autre poids, sera la résistance, que nous désignerons par R; et la question qu'il s'agit de résoudre consiste à trouver le rapport de ces deux forces R et P dans le cas de l'équilibre. Mais avant de chercher ce rapport, il est nécessaire de connaître la génération du filet CMD, dont la vis est enveloppée.

Pour cela, prenons un rectangle $abcd$ (fig. 84); divisons l'un des côtés cd en un nombre quelconque de parties égales cc', $c'c''$...., et par les points de division c',c''...., menons des parallèles à la base, qui partageront aussi le côté ba en parties égales bb', $b'b''$..... ; menons ensuite les droites transversales cb',$c'b''$,$c''b'''$....., qui seront aussi parallèles et égales entre elles; cela fait, enveloppons ce rectangle sur un cylindre droit $cdef$ de même hauteur que le rectangle, et tel que la circonférence de sa base soit égale en longueur à la base cb de ce rectangle. La surface du rectangle recouvrira exactement celle du cylindre, de manière que le côté ab viendra rejoindre le côté dc; les points b',b''....., tomberont sur les points $c'c''$....., et les droites cb', $c'b''$....., formeront une courbe continue sur la surface du cylindre. On nomme la courbe ainsi formée, une *hélice*; la partie de cette courbe qui va d'un point à un autre de la droite cd, par exemple, la

portion $c''mc^{IV}$, s'appelle une *spire*; l'intervalle $c''c^{IV}$ compris entre les deux extrémités d'une même spire, forme ce qu'on nomme le *pas* de l'hélice. Toutes les spires d'une même hélice sont égales en longueur, et le pas de l'hélice se trouve partout le même. Si l'on mène par le point quelconque m, un plan qui touche la surface du cylindre suivant la droite pmq, parallèle à son axe ou perpendiculaire à sa base, et que l'on développe cette surface sur ce plan, les spires de l'hélice se changeront en une suite de droites parallèles, qui couperont la droite pmq, sous un angle égal à celui que les lignes transversales cb', $c'b''$..., font avec la droite cd; ces parallèles tracées dans le plan tangent, représenteront les tangentes à l'hélice aux différens points de la droite pmq; d'où il résulte que pour mener une tangente à cette courbe, au point quelconque m, il faut construire dans le plan qui touche le cylindre en ce point, un triangle rectangle hln, dont la hauteur hn soit parallèle à la droite pmq et égale au pas de l'hélice, dont la base ln soit égale au contour du cylindre ou à la droite cb, et enfin dont l'hypothénuse hl passe par le point m: cette hypothénuse sera la tangente demandée.

Cela posé, menons un plan quelconque par l'axe de la vis (fig. 83); ce plan coupera le filet *CMD* suivant une certaine section; supposons que cette section se meuve de manière que son plan passe constamment par l'axe, et qu'en même tems tous ses points décrivent des hélices semblables autour de cet axe; elle engendrera, par ce mouvement, le filet *CMD* qui enveloppe le cylindre. La section génératrice est le plus souvent un triangle; elle est quelquefois un rectangle; et l'on pourrait lui supposer indifféremment toute autre figure. Les hélices décrites par les différens points de cette section, ont toutes le même pas; on le nomme le *pas de la vis*; et il est d'autant plus petit, que pour une même longueur du cylindre, le filet *CMD* fait un plus grand nombre de circonvolutions.

Maintenant il nous sera aisé de trouver la condition d'équilibre des deux forces P et R, appliquées à l'écrou mobile. Supposons d'abord que l'écrou ne pose sur la vis que par un

seul point du filet CMD, et regardons ce point de contact comme chargé de tout le poids R de l'écrou; soit cmd (fig. 85) l'hélice appartenante au filet, et passant par le point de contact, qui sera le point m. Suspendons à ce point le poids R; soient aussi AB l'axe vertical du cylindre, et G l'extrémité de la barre à laquelle est appliquée la puissance P, suivant la direction CH; abaissons des points m et G, sur l'axe AB, des perpendiculaires mk et GO; la direction GH a déjà été supposée horizontale; supposons de plus qu'elle soit perpendiculaire à GO. Enfin, construisons la tangente hml à l'hélice au point m, laquelle tangente est l'hypothénuse d'un triangle dont le plan est perpendiculaire à la droite km, et dont les deux autres côtés, hn et nl, sont égaux au pas de l'hélice et à la circonférence qui a pour rayon mk.

La force P dirigée suivant GH, équivaut à une force P', qui agirait au point m, suivant une droite horizontale mH', comprise dans le plan hnl, et dont la grandeur serait déterminée par cette proportion :

$$P : P' :: km : OG;$$

car en considérant AB comme l'axe d'un treuil, et km et OG comme les rayons du cylindre et de la roue, la force P ferait équilibre à une force égale à la force P', et qui lui serait directement contraire, ou qui agirait dans le sens mH''; donc la force P est équivalente à la force P', et peut être remplacée par elle. De cette manière, le poids R suspendu au point m, est tenu en équilibre par la force P' appliquée au même point; il faut donc que cette force empêche le point m de glisser le long de l'hélice cmd, ou, ce qui est la même chose, dans le premier moment, sur sa tangente hml; par conséquent, le poids R est dans le même cas que s'il était posé sur un plan incliné, dont hl, hn et nl seraient la longueur, la hauteur et la base, et qu'il fût retenu sur ce plan par la force P' parallèle à sa base; or, d'après ce qu'on a vu plus haut, on aura pour l'équilibre des forces R et P',

$$P' : R :: hn : ln.$$



Afin d'éliminer P' entre cette proportion et la précédente, j'observe que les circonférences sont entre elles comme les rayons, et qu'on a $nl =$ circ. km, de sorte que la proportion qui donne le rapport de P' à P peut s'écrire ainsi :

$$P : P' :: nl : \text{circ.}\, OG;$$

donc en multipliant terme à terme cette proportion et la précédente, nous aurons

$$P : R :: hn : \text{circ.}\, OG;$$

ce qui nous apprend que dans l'équilibre de la vis, *la puissance* P *est à la résistance* R, *comme le pas de la vis est à la circonférence du cercle que la puissance tend à faire décrire à son point d'application.*

Ainsi l'avantage de la puissance sur la résistance est d'autant plus grand, que la puissance agit à une plus grande distance de l'axe, et que le pas de la vis est plus petit, ou que le filet qui enveloppe le cylindre est plus resserré. A la vérité, nous avons supposé, pour parvenir à ce résultat, que l'écrou mobile ne posait que par un seul point sur le filet de la vis; mais on conçoit aisément que le rapport de la puissance à la résistance étant indépendant de la position du point de contact, il sera encore le même quand l'écrou touchera la vis en plusieurs points. En effet, le poids de l'écrou se partagera d'une manière quelconque entre tous les points de contact. Appelons r, r', r''...., les parties de ce poids qui peseront sur ces différens points, et qui, en somme, reproduiront le poids R; on peut partager la puissance P en un pareil nombre de parties p, p', p''..., et supposer que la force p est employée à tenir en équilibre le poids r; et de même pour les autres; alors chaque poids partiel sera à la force qui lui fait équilibre, dans le rapport constant de la circonférence OG à hn; de sorte qu'on aura

$$r = p.\frac{\text{circ.}\, OG}{hn},\quad r' = p'.\frac{\text{circ.}\, OG}{hn},\quad r'' = p''.\frac{\text{circ.}\, OG}{hn};$$

ajoutant toutes ces équations, et observant que $r+r'+r''...=R$, $p+p'+p''...=P$, il vient

$$R=P.\frac{\text{circ}.OG}{hn};$$

c'est-à-dire, le même rapport que dans le cas d'un seul point de contact.

Du Coin.

Le *coin* est un prisme triangulaire que l'on introduit dans une fente, pour écarter davantage les deux parties d'un corps. La face qui est hors du corps, et sur laquelle on frappe pour enfoncer le coin, se nomme la *tête du coin;* on appelle *tranchant*, l'arête par laquelle il commence à s'enfoncer, et côtés, les deux faces adjacentes à cette arête, par lesquelles il comprime les deux parties du corps. La puissance est la percussion que l'on exerce sur la tete du coin, par un coup de marteau ou tout autrement; la force qu'elle doit vaincre est la résistance que les parties du corps opposent à leur séparation; mais comme cette résistance n'est jamais bien connue, nous ne chercherons pas, comme dans les autres machines, le rapport de la puissance à la résistance, et nous nous bornerons à déterminer les efforts que la puissance exerce sur les deux côtés du coin perpendiculairement à ces côtés. Nous supposerons la puissance perpendiculaire à la tête du coin; car si elle ne l'était pas, elle se décomposerait en deux forces : l'une parallèle à cette tête, et qui n'aurait aucun effet pour enfoncer le coin; l'autre perpendiculaire, et seule nécessaire à considérer.

Soit DE (fig. 86), la direction de la puissance; par cette droite, qu'on suppose perpendiculaire à la tête du coin, menons un plan perpendiculaire au tranchant, et comme cette arête est l'intersection des deux côtés du coin, ce plan sera aussi perpendiculaire à ces deux côtés; soit ABC le triangle suivant lequel notre plan coupera le prisme triangulaire qui forme le coin; abaissons du point E, où la direction de la

puissance rencontre la tète du coin, deux perpendiculaires EF et EG sur les côtés AC et BC, et décomposons la puissance en deux forces dirigées suivant EF et EG; ces deux composantes représenteront les efforts que la puissance exerce sur les côtés du coin, et dont il s'agit de trouver le rapport à cette puissance. Appelons donc P cette force donnée, X et Y les composantes suivant EF et EG; prolongeons la direction DE de la force P, d'une quantité arbitraire Ee, et par le point e menons les droites ef et eg, parallèles à EG et EF; la force P et ses composantes X et Y, seront entre elles comme la diagonale Ee et les deux côtés Ef et Eg, du parallélogramme $Efeg$; donc à cause de $Eg = fe$, on aura

$$P : X : Y :: Ee : Ef : fe.$$

Or, les trois côtés du triangle Eef sont perpendiculaires à ceux du triangle ABC, savoir, Ee à AB, Ef à AC, ef à BC; ces triangles sont donc semblables, et l'on a

$$Ee : Ef : fe :: AB : AC : BC;$$

par conséquent,

$$P : X : Y :: AB : AC : BC;$$

c'est-à-dire, que les trois forces P, X, Y, sont entre elles comme les trois côtés du triangle ABC, auxquels leurs directions sont perpendiculaires.

Les droites AB, AC, BC, sont entre elles dans le même rapport que les faces du coin qu'on appelle sa tête et ses deux côtés; car ces faces sont des parallélogrammes de même base, qui ont pour hauteur AB, AC, BC; il s'ensuit donc que la puissance B et ses deux composantes, sont entre elles comme la tête et les deux côtés du coin, ou bien que la puissance étant représentée par la tête du coin, l'effort qu'elle exerce sur chacun des deux côtés, est représenté par ce côté. En se servant donc d'un coin très-aigu, ou dont les côtés soient très-longs par rapport à la tête, on pourra exercer latéralement des efforts très-considérables, en frappant d'un coup médiocre sur la tête du coin.

Loi générale de l'équilibre dans les machines.

En combinant ensemble de différentes manières les machines que nous venons de considérer, on formera d'autres machines dont le nombre peut se multiplier à l'infini. Relativement à ces machines composées, on déterminera le rapport de la puissance à la résistance nécessaire à l'équilibre, en ayant égard aux tensions des cordes qui lient les diverses parties de la machine, et en supposant ce rapport connu, pour chacune des parties composantes. C'est ce que nous avons fait par rapport au système de poulies et à l'assemblage de treuils représentés par les figures 75 et 79, et ces exemples suffisent pour montrer comment il faudra s'y prendre dans des cas plus compliqués. Mais quelle que soit la composition d'une machine, il existe une règle qui donne immédiatement le rapport de la puissance à la résistance, d'après celui des espaces que tendent à décrire les points d'application des deux forces. Cette règle est un cas particulier du *principe des vitesses virtuelles*, que nous avons exposé et démontré d'une manière générale, dans le chapitre VII du I[er] livre; mais comme elle peut être d'une grande utilité dans la pratique, il est bon de la rappeler ici, sans revenir sur sa démonstration.

Supposons que l'on imprime à la machine un mouvement très-petit, et que les points d'application de la puissance et de la résistance décrivent des courbes tangentes aux directions de ces forces; appelons p, l'espace parcouru par le point d'application de la puissance, et r, l'espace parcouru par celui de la résistance; soit P la première et R la seconde de ces deux forces; si l'on demande le rapport de P à R nécessaire à l'équilibre, on aura, par approximation,

$$\frac{P}{R}=\frac{r}{p};$$

et cette valeur approchera d'autant plus de la valeur exacte, que le mouvement imprimé à la machine sera plus petit, de manière qu'en prenant la limite du rapport $\frac{r}{p}$, on aura rigoureusement la valeur demandée de $\frac{P}{R}$.

Si les courbes décrites par les points d'application des forces P et R, ne sont pas tangentes à leurs directions, on prendra, au lieu des espaces parcourus par ces points, les projections de ces espaces sur les directions des forces, et le rapport inverse de ces projections fera connaître le rapport des forces dans le cas de l'équilibre. On sera libre de prendre, pour point d'application de chaque force, tel point qu'on voudra de sa direction, pourvu qu'on le regarde comme fixement attaché à la machine.

Maintenant appliquons cette règle à quelques exemples propres à en montrer l'usage et à la vérifier.

Dans le levier (fig. 72), je prends pour points d'application des forces P et R, les pieds b et c des perpendiculaires Ab et Ac, abaissées du point d'appui A sur les directions de ces forces. Quand le levier tourne autour du point A, les points b et c décrivent des arcs de cercle tels que bb' et cc', tangens aux directions bE et cF des forces, et d'un même nombre de degrés; les longueurs de ces arcs semblables sont entre elles comme leurs rayons Ab et Ac, desorte qu'on a

$$\frac{cc'}{bb'} = \frac{r}{p} = \frac{Ac}{Ab};$$

et à cause que ce rapport reste le même, quelque petit qu'on suppose le mouvement imprimé au levier, il s'ensuit qu'on a rigoureusement

$$\frac{P}{R} = \frac{Ac}{Ab};$$

c'est-à-dire, que dans le cas de l'équilibre, les deux forces

P et R sont en raison inverse des perpendiculaires abaissées du point d'appui sur leurs directions. Si l'on eût choisi les extrémités B et C du levier, pour points d'application des forces P et R, les arcs de cercle décrits par ces points pendant le mouvement du levier, n'auraient pas été tangens aux directions de ces forces; il aurait donc fallu projeter ces arcs sur les droites BE et CF, prendre ensuite le rapport de ces projections, et chercher la limite de ce rapport : on aurait trouvé qu'elle est égale au rapport des perpendiculaires Ab et Ac (nº 164).

Quand le treuil (fig. 78) tourne autour de son axe, les points d'application de la puissance et de la résistance décrivent des arcs semblables ou d'un même nombre de degré, l'un sur la circonférence de la roue et l'autre sur celle du cylindre. Ces arcs sont tangens aux directions des forces; leurs longueurs sont entre elles comme les rayons OM et KE, de la roue et du cylindre; on a donc dans cette machine

$$\frac{p}{r}=\frac{OM}{KE} \quad \text{et} \quad \frac{P}{R}=\frac{KE}{OM}.$$

Lorsque l'écrou parcourt un espace égal au pas de la vis, ou lorsqu'il s'élève d'une hauteur égale à hn (fig. 85), le point G auquel est appliquée la puissance, décrit une hélice autour de l'axe AB dont le pas est le même que celui de la vis; en même tems la projection de ce point, sur un horizontal, passant par le point O, décrit la circonférence du cercle dont le rayon est OG; de plus, ces mouvemens de l'écrou, du point G et de sa projection, sont tels, d'après la nature de l'hélice, que si l'écrou parcourt la moitié, le tiers, ou toute autre partie du pas de la vis, le point G parcourt une partie semblable de la longueur de l'hélice, et sa projection horizontale décrit aussi la moitié le tiers, ou toute autre partie proportionnelle de la circonférence dont OG est le rayon; appelant donc, en général, r la quantité dont l'écrou a monté, et s l'arc de cercle parcouru

en même tems par la projection horizontale du point G; on aura

$$r : hn :: s : \text{circ}.OG.$$

Or, l'hélice décrite par le point G n'étant point tangente à la direction de la puissance P, il faut, pour appliquer à ce cas la loi générale de l'équilibre, considérer la projection d'un très-petit arc de cette hélice, sur la direction GH de la force P; mais à cause que cette direction a été supposée tangente à la circonférence dont OG est le rayon, la projection sur la tangente sera à peu près égale à la projection sur la circonférence, et l'on pourra prendre l'une pour l'autre, quand il s'agira d'un mouvement infiniment petit de l'écron; par conséquent le rapport de la puissance P à la résistance ou au poids R de l'écrou, sera donnée en prenant la limite du rapport $\frac{r}{s}$; et comme celui-ci est constamment le même, et égal à $\frac{hn}{\text{circ}.OG}$, d'après la proportion précédente, il en résulte que l'on a, dans le cas de l'équilibre,

$$P : R :: hn : \text{circ}.OG;$$

proportion que nous avions déjà trouvée par d'autres considérations.

Dans la moufle représentée par la figure 77, si le poids parcourt en montant une espace quelconque r, chacun des six cordons qui aboutissent aux poulies mobiles se raccourcit de la même quantité r; par conséquent le cordon auquel est suspendu le poids P, s'alonge d'une quantité égale à $6r$, qui marque l'espace parcouru en descendant par ce poids; prenant donc $p = 6r$, on aura, dans le cas de l'équilibre,

$$\frac{P}{R} = \frac{r}{p} = \frac{1}{6}, \quad \text{ou} \quad R = 6P;$$

et l'on trouverait de même $R = nP$, en supposant que n fût

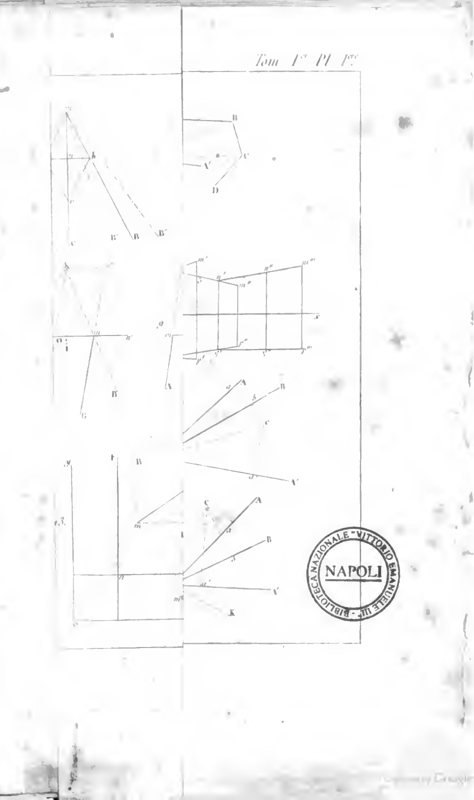
le nombre des cordons qui aboutissent aux poulies mobiles.

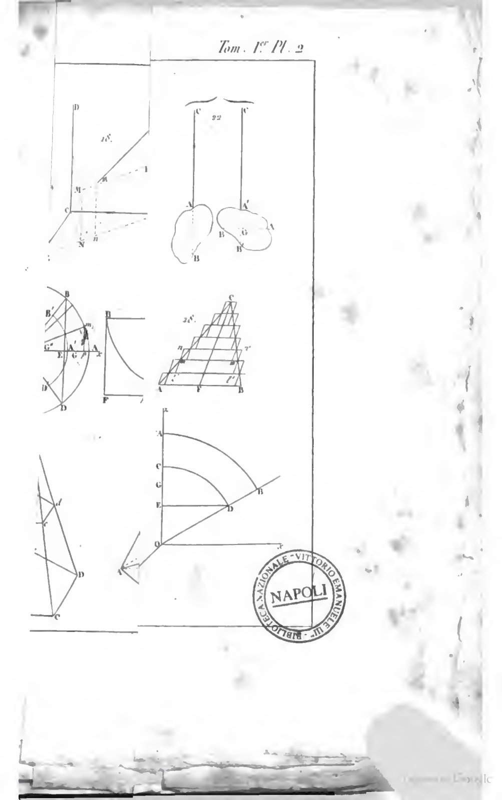
Enfin, je choisis pour dernier exemple, l'assemblage de poulies représenté par la figure 76. Si le poids P parcourt en descendant, un espace quelconque p, le cordon EB se raccourcira d'une quantité égale à $\frac{1}{2}.p$; cela étant, le cordon $E'B'$ se raccourcira de même de la moitié de $\frac{1}{2}.p$, ou de $\frac{1}{4}.p$; et par suite, le cordon $E''B''$ se raccourcira de la moitié de $\frac{1}{4}.p$, ou de $\frac{1}{8}.p$; ce dernier raccourcissement exprime l'espace que le poids R parcourra en montant : quel que soit p, on aura donc $r = \frac{1}{8}.p$; d'où il suit, dans le cas de l'équilibre,

$$\frac{P}{R} = \frac{r}{p} = \frac{1}{8}, \quad \text{ou} \quad R = 8p.$$

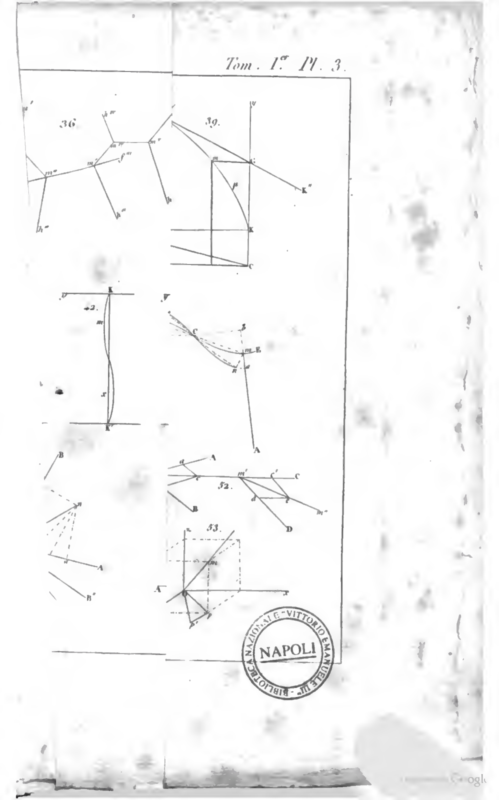
Généralement, on trouvera par cette considération, $R = 2^n.P$, n désignant le nombre des poulies mobiles qui entrent dans une semblable machine.

FIN DU PREMIER VOLUME.





D
18.
M
C
N
n
C
22
C
A
A'
B
G
B
B
B
B'
G'
A
E
G
A
D
D
F
C
28.
n
A
F
B
A
C
G
E
D
B
O
x


36.
39.
42.
52.
53.

55. 56

59.

63. 67.

69. 72.

75.

82

84

86.



